4.2. Классическое понятие дифференциальной формы

В терминах координатной системы дифференциальная форма в точке m представляет собой выражение вида $\sum a_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$, где суммирование распространяется на все упорядоченные подсистемы $(i_1, \dots, i_p)$ системы $\{1, \dots, d\}$ и $a_{i_1 \dots i_p}$ — вещественные числа.

Поэтому строгое определение будет включать некоторое перемножение дифференциалов с последующим линейным комбинированием таких произведений. Следовательно, M_m^* вкладывается в некоторую алгебраическую систему, обладающую и операцией умножения и векторными операциями. Кроме того, наше определение должно удовлетворять такому условию: если $(y_1, \dots \dots, y_d)$ — другая координатная система в точке m, то выражение $\sum b_{i_1 \dots i_p} dy_{i_1} \dots dy_{i_p}$, полученное из первого по обычным правилам замены переменных в кратных интегралах, должно быть в точности разложением того же алгебраического объекта в терминах нового базиса. Алгебраической системой, удовлетворяющей этим требованиям, оказывается алгебра Грассмана, к рассмотрению которой мы теперь переходим.

4.3. Алгебры Грассмана

Пусть F — поле, V — конечномерное векторное пространство над F размерности d. *Грассманова алгебра над* V — это такое множество G, что

(I) G — ассоциативная алгебра с единицей e над F;

(II) G содержит V;

(III) всякий элемент $v \in V$ удовлетворяет условию $v^2 = 0$;

(IV) G имеет размерность 2^d;

(V) G порождается единицей e и пространством V, т. е. всякий элемент G является суммой произведений скалярных кратных единицы e и элементов V.

Отметим, что $e \notin V$, поскольку $e^2 = e \neq 0$, тогда как, в силу (III), $v^2 = 0$ для всех $v \in V$. Далее, если $u, v \in V$, то

$uv = -vu$. Это доказывается, как всегда, с помощью поляризации:

$$0 = (u+v)^2 = u^2 + uv + vu + v^2 = uv + vu.$$

Свойство (IV) — краткий, хотя и не явный способ выражения того, что среди элементов G нет других соотношений, кроме тех, которые вытекают из (III).

Каждому базису $e_1, \ldots, e_d$ пространства V соответствует некоторый базис пространства G. Элементы этого базиса в G находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножествами $\{1, \ldots, d\}$:

(а) пустому подмножеству $\varnothing$ соответствует элемент $e_\varnothing = e$;

(б) подмножеству $s = \{i_1, \ldots, i_p\}$, $i_1 < \ldots < i_p$, соответствует элемент $e_s = e_{i_1} \ldots e_{i_p}$.

Отметим, что всего имеется 2^d подмножеств, так что для проверки того, что элементы e_s образуют базис, достаточно доказать, что справедлива

Лемма 1. Элементы e_s порождают пространство G.

Доказательство. В силу свойства (V), для всякого $g \in G$ имеем

$$g = a_0 e_\varnothing + \sum (\text{произведения элементов } V) =$$
$$= a_0 e_\varnothing + \sum (\text{коэффициенты из } F) \cdot (\text{произведения элементов } e_i).$$

Воспользовавшись антикоммутативностью элементов из V, мы можем в любом произведении расположить сомножители e_i по возрастанию их индексов, а тогда все слагаемые, кроме e_s, окажутся равными нулю, в силу (III).

Элемент $g \in G$ называется *однородным степени* p, если его можно записать как сумму произведений по p элементов из V, или, что эквивалентно, $g = \sum_{s \in P} a_s e_s$, где $a_s \in F$, а P — совокупность всех подмножеств $\{1, \ldots, d\}$, имеющих ровно p элементов.

Совокупность таких $g \in G$ образует линейное подпространство G^p алгебры G размерности $\binom{d}{p}$. Очевидно, что $G^p G^q \subset G^{p+q}$. Кроме того, в силу антикоммутативности, если $g \in G^p$, $h \in G^q$, то $gh = (-1)^{pq} hg$.

Однородный элемент $g \in G$ степени p называется *разложимым*, если $g = v_1 \dots v_p$ при некоторых $v_1, \dots, v_p \in V$. В противном случае элемент g называется *неразложимым*.

Задача 1. Если $\dim V \leqslant 3$, то каждый однородный элемент разложим. Если $\dim V > 3$ и v_1, v_2, v_3, v_4 линейно независимы, то элемент $v_1 v_2 + v_3 v_4$ неразложим.

В общем случае разложимые элементы образуют (нелинейное) алгебраическое подмногообразие в G^p.

Задача 2. Доказать, что для $g \in G^2$ найдутся линейно независимые $v_1, \dots, v_{2k} \in V$, такие, что $g = v_1 v_2 + v_3 v_4 + \dots + v_{2k-1} v_{2k}$; показать, что если характеристика поля F отлична от простого числа $\leqslant (1/2) d$, то k — наибольшее целое число, для которого $g^k \neq 0$, и тогда элемент g^k разложим.

В этом случае говорят, что g имеет *ранг* $2k$.

Задача 3. Если $\dim V = 4$ и характеристика поля F отлична от 2, то g разложим в том и только в том случае, если $g^2 = 0$ и g — однородный элемент. Вообще, если $\dim V = 4$ и $g \in G^{d-1}$, то элемент g разложим.

Задача 4. Пусть $x \neq 0$, $x \in V$, $g \in G$. Доказать, что $xg = 0$ тогда и только тогда, когда $g = xh$ при некотором $h \in G$.

Замечания. (1) Если $v_1, \dots, v_p \in V$, то $v_1 \dots v_p \neq 0$ тогда и только тогда, когда $v_1, \dots, v_p$ линейно независимы.

Доказательство. Если $v_1, \dots, v_p$ линейно независимы, то их можно дополнить до базиса в V, так что $v_1 \cdots v_p = e_s \neq 0$, $s = \{1, \dots, p\}$.

Если $v_1, \ldots, v_p$ линейно зависимы, скажем $v_1 = \sum_{i=2}^{p} a_i v_i$, то, в силу дистрибутивности и антикоммутивности,

$$v_1 \ldots v_p = \sum_{i=2}^{p} \pm a_i v_2 \ldots v_i^2 \ldots v_p = 0.$$

(2) Любые две грассмановы алгебры над V по существу совпадают; точнее, если G и H — такие алгебры, то существует изоморфизм G на H, оставляющий неподвижным каждый элемент V. Действительно, нужно только выбрать базис в V и отобразить элементы e_s из G в соответствующие элементы из H.

(3) Если T — линейное преобразование векторного пространства V в векторное пространство W и $G(V)$, $G(W)$ — соответствующие алгебры Грассмана над V и W, то существует единственное продолжение преобразования T до гоморфизма T_h алгебры $G(V)$ в $G(W)$, причем $T_h(G(V)^p) \subset G(W)^p$.

Доказательство. Единственность немедленно следует из того, что $T(e)$ должно равняться e и что $G(V)$ порождается e и элементами V. По линейности T_h можно продолжить на все $G(V)$, если определить

$$T_h(v_1 \ldots v_p) = T(v_1) \ldots T(v_p) \quad \text{для} \quad v_1, \ldots, v_p \in V,$$

и такое T_h, очевидно, является гомоморфизмом.

Задача 5. Если $T : V \to W$, $S : W \to X$ — линейные преобразования векторных пространств, то $(ST)_h = S_h T_h$.

Задача 6. Если $T : V \to V$ — линейное преобразование, то оно допускает единственное продолжение до дифференцирования в $G(V)$, т. е. до такого отображения T_d, что $T_d(gh) = T_d(g)h + gT_d(h)$, где $g, h \in G(V)$.

Задача 7. Если $T, S : V \to V$, то $[S_d, T_d]$ является дифференцированием и $[S, T]_d = [S_d, T_d]$, т. е. $(ST)_d - (TS)_d = S_d T_d - T_d S_d$. Привести пример, показывающий, что $S_d T_d$ не всегда является дифференцированием.

Если V является d-мерным векторным пространством и G — его алгебра Грассмана, то G^d — одномерное пространство. Линейное преобразование G^d в себя — это просто скалярное умножение на некоторый элемент из F. Если S — такое преобразование, то соответствующий скаляр обозначается через $k(S)$.

Пусть теперь T — линейное преобразование V в себя. Ввиду замечания (3) и задачи 6 существуют продолжения T_h и T_d преобразования T на G, которые являются соответственно гомоморфизмом и дифференцированием. В частности, T_h и T_d — линейные преобразования G^d. Введем определитель и след преобразования T следующим образом:

$$\det T = k(T_h),$$

$$\operatorname{tr} T = k(T_d).$$

Легко проверяется, что отображение $T \to \det T$ пространства $\mathfrak{gl}(V)$ в F определяет гомоморфизм группы $Gl(V) \subset \mathfrak{gl}(V)$, причем $T \in Gl(V)$ тогда и только тогда, когда $\det T \neq 0$. Легко также проверить, что этот определитель совпадает с обычным.

Задача 8. Показать, что

(а) $\operatorname{tr}(S+T) = \operatorname{tr}(S) + \operatorname{tr}(T)$,

(б) $\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS)$ (применить задачу 7, чтобы обойтись без координат).

Задача 9. Пусть f — линейный функционал на пространстве $\mathfrak{gl}(V)$, удовлетворяющий следующим условиям: (а) $f(ST) = f(TS)$ для любых $T, S \in \mathfrak{gl}(V)$; (б) если I — тождественное преобразование в V, то $f(I) = d = \dim V$. Доказать, что $f = \operatorname{tr}$ и что подпространство $[\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$ имеет коразмерность 1 в $\mathfrak{gl}(V)$, причем дополнительное подпространство состоит из скалярных кратных I.

4.4. Существование алгебр Грассмана

Альтернирующие функции. Та конкретная алгебра Грассмана над V, которую мы хотим рассматривать, является пространством полилинейных альтернирующих функций на сопряженном W к V. Таким образом,