Если V является d-мерным векторным пространством и G — его алгебра Грассмана, то G^d — одномерное пространство. Линейное преобразование G^d в себя — это просто скалярное умножение на некоторый элемент из F. Если S — такое преобразование, то соответствующий скаляр обозначается через $k(S)$.

Пусть теперь T — линейное преобразование V в себя. Ввиду замечания (3) и задачи 6 существуют продолжения T_h и T_d преобразования T на G, которые являются соответственно гомоморфизмом и дифференцированием. В частности, T_h и T_d — линейные преобразования G^d. Введем определитель и след преобразования T следующим образом:

$$\det T = k(T_h),$$

$$\operatorname{tr} T = k(T_d).$$

Легко проверяется, что отображение $T \to \det T$ пространства $\mathfrak{gl}(V)$ в F определяет гомоморфизм группы $Gl(V) \subset \mathfrak{gl}(V)$, причем $T \in Gl(V)$ тогда и только тогда, когда $\det T \neq 0$. Легко также проверить, что этот определитель совпадает с обычным.

Задача 8. Показать, что

(а) $\operatorname{tr}(S+T) = \operatorname{tr}(S) + \operatorname{tr}(T)$,

(б) $\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS)$ (применить задачу 7, чтобы обойтись без координат).

Задача 9. Пусть f — линейный функционал на пространстве $\mathfrak{gl}(V)$, удовлетворяющий следующим условиям: (а) $f(ST) = f(TS)$ для любых $T, S \in \mathfrak{gl}(V)$; (б) если I — тождественное преобразование в V, то $f(I) = d = \dim V$. Доказать, что $f = \operatorname{tr}$ и что подпространство $[\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$ имеет коразмерность 1 в $\mathfrak{gl}(V)$, причем дополнительное подпространство состоит из скалярных кратных I.

4.4. Существование алгебр Грассмана

Альтернирующие функции. Та конкретная алгебра Грассмана над V, которую мы хотим рассматривать, является пространством полилинейных альтернирующих функций на сопряженном W к V. Таким образом,

G^0 есть поле F, над которым определено V;

G^1 есть пространство линейных функций на W со значениями в F.

В нашем случае G^1 канонически изоморфно V: как обычно, $v \in V$ соответствует единственному $f \in G^1$, удовлетворяющему равенству $f(w) = w(v)$ при любом $w \in W$. Этот изоморфизм осуществляет вложение V в G.

Пространство G^p является пространством p-линейных альтернирующих функций на $W \times \ldots \times W$ (всего p сомножителей) со значениями в F. Иначе говоря, если $f \in G^p$, то

$$\text{(I)}\quad f(w_1, \ldots, aw_i + bw_i', \ldots, w_p) = \\ = af(w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_p) + bf(w_1, \ldots, w_i', \ldots, w_p),$$

т. е. f линейно по каждому переменному при фиксированных остальных;

$$\text{(II)}\quad f(w_1, \ldots, w_p) = 0$$

всякий раз, когда два из w_i равны.

Если характеристика поля скаляров не равна 2, то, как всегда, с помощью поляризации можно показать, что (I) и (II) в совокупности эквивалентны (I) и

$$\text{(II)}'\quad f(w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_j, \ldots, w_p) = \\ = -f(w_1, \ldots, w_j, \ldots, w_i, \ldots, w_p).$$

Далее, поскольку перестановки порождают симметрическую группу S_p, то (II)$'$ эквивалентно соотношению

$$\text{(II)}''\qquad f(w_{\pi 1}, \ldots, w_{\pi p}) = \operatorname{sgn}(\pi) f(w_1, \ldots, w_p)$$

для любого $\pi \in S_p$. Даже при характеристике 2 из соотношений (I) и (II) следует (II)$'$.

Иногда удобно рассматривать $W \times \ldots \times W$ (p сомножителей) как семейство функций на $\{1, \ldots, p\}$ со значениями в W и в этом случае (II)$''$ можно переписать в виде

$$f(z \circ \pi) = \operatorname{sgn}(\pi) f(z) \qquad \text{для} \qquad z \in W \times \ldots \times W.$$

Умножение. Пусть S_{p+q} — группа подстановок в множестве $\{1, \ldots, p+q\}$, S_p — подгруппа, оставляющая неподвижным каждый элемент из $\{p+1, \ldots, p+q\}$, S'_q — подгруппа, оставляющая неподвижным каждый элемент из $\{1, \ldots, p\}$. *Сечением подгруппы* $S_pS'_q$ *в* S_{p+q} называется всякое подмножество $K \subset S_{p+q}$, которое имеет ровно по одному элементу из каждого левого класса смежности подгруппы $S_pS'_q$. Например, часто встречающимся сечением служит совокупность *тасующих подстановок*, а именно множество

$$K = \{\pi \in S_{p+q} \mid \pi 1 < \pi 2 < \ldots < \pi p \text{ и } \pi(p+1) < \pi(p+2) < \ldots < \pi(p+q)\}.$$

Такое название объясняется следующим: если колода из $p+q$ карт разделена на две части по p и q карт и затем перетасована обычным способом, то результирующее преобразование карточной колоды является p, q-тасующей подстановкой.

Рис. 15.

Пусть $f \in G^p$, $g \in G^q$, K — некоторое сечение подгруппы $S_pS'_q$ в S_{p+q}, A_p — операция прибавления p; определим произведение fg, принимающее на $z \in W^{p+q}$ значение

$$fg(z) = \sum_{\pi \in K} \operatorname{sgn}(\pi) f(z \circ \pi) g(z \circ \pi \circ A_p).$$

Чтобы пояснить эту формулу, заметим, что при $z(i) = w_i$

$$f(z \circ \pi) = f(w_{\pi 1}, \ldots, w_{\pi p}),$$

$$g(z \circ \pi \circ A_p) = g(w_{\pi(p+1)}, \ldots, w_{\pi(p+q)}).$$

Используя (II)″, легко проверить, что это умножение не зависит от выбора K.

Предложение 1. $fg \in G^{p+q}$.

Доказательство. В самом деле, $(p+q)$-линейность функции fg очевидна.

Предположим, что $\sigma \in S_{p+q}$, а K — указанное выше сечение. Тогда

$$fg(z \circ \sigma) = \sum_{\pi \in K} \operatorname{sgn}(\pi) f(z \circ \sigma \circ \pi) g(z \circ \sigma \circ \pi \circ A_p) =$$
$$= \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\rho \in \sigma K} \operatorname{sgn}(\rho) f(z \circ \rho) g(z \circ \rho \circ A_p).$$

Теперь достаточно проверить, что σK также является сечением. Пусть π, $\pi' \in K$, тогда $(\sigma\pi)^{-1}(\sigma\pi') = \pi^{-1}\pi'$ принадлежит $S_p S_q'$, если только $\pi = \pi'$. Таким образом, все элементы σK находятся в различных классах смежности, и поскольку число элементов σK совпадает с числом элементов K, то σK должно быть сечением.

Мы показали, что fg удовлетворяет лишь (II)$'$. Предложение 1 верно и при характеристике 2, но мы не приводим доказательство.

Предложение 2. Это умножение ассоциативно.

Набросок доказательства. Пусть $f \in G^p$, $g \in G^q$, $h \in G^r$. Будем рассматривать S_{p+q} как подгруппу S_{p+q+r}, S_r'' — как группу подстановок в $\{p+q+1, \ldots \ldots, p+q+r\}$ и аналогичные соглашения примем относительно S_p и S_{q+r}'. Можно показать, что если K — сечение подгруппы $S_p S_q'$ в S_{p+q}, K' — сечение подгруппы $S_{p+q} S_r''$ в S_{p+q+r}, L — сечение подгруппы $S_q' S_r''$ в S_{q+r}' и L' — сечение подгруппы $S_p S_{q+r}'$ в S_{p+q+r}, то $K'K$ и $L'L$ — сечения подгруппы $S_p S_q' S_r''$ в S_{p+q+r}. Поэтому остается, выписав произведения с обеими расстановками скобок, проверить, что сумма

$$fgh(z) = \sum_{\pi \in K'K} \operatorname{sgn}(\pi) f(z \circ \pi) g(z \circ \pi \circ A_p) h(z \circ \pi \circ A_{p+q})$$

не зависит от сечения подгруппы $S_p S_q' S_r''$ в S_{p+q+r}, по которому мы суммируем. Это снова тривиально в силу (II)$'$.

Предложение 3. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_p \in V$, тогда

$$v_1 \ldots v_p(w_1, \ldots, w_p) = \sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn}(\pi)\, v_1(w_{\pi 1}) \ldots v_p(w_{\pi p}).$$

Доказательство сводится к обобщению рассуждений, использованных при доказательстве предложения 2.

Следствие. Если $v \in V$, то $v^2 = 0$.

Наконец, сложение, умножение на скаляр и единица в пространстве полулинейных функций определяются очевидным образом.

Итак, мы показали, что $G = \sum G^i$ удовлетворяет аксиомам (I)—(III) теории алгебр Грассмана. Проверим аксиомы (IV) и (V).

Лемма 2. Пусть $e_1, \ldots, e_d$ — базис в V. Тогда $e_D \neq 0$, где $D = \{1, \ldots, d\}$.

Доказательство. Пусть $w_1, \ldots, w_d$ — базис, сопряженный к $e_1, \ldots, e_d$. Тогда, в силу предложения 3, $e_D(w_1, \ldots, w_d) = 1 \neq 0$.

Предложение 4. Элементы e_s линейно независимы, а потому $\dim G \geqslant 2^d$.

Доказательство. Так как $\sum G^i$ — прямая сумма, то нужно только показать, что элементы e_s, $s = \{i_1, \ldots, i_p\}$, являются линейно независимыми. Пусть P — множество всех таких s. Если теперь $\sum_{s \in P} a_s e_s = 0$ и $s_0 \in P$, то

$$0 = \sum_{s \in P} a_s e_s e_{D - s_0} = \pm a_{s_0} e_D,$$

так как $e_i^2 = 0$ и e_i антикоммутируют. Поэтому, в силу леммы 2, $a_{s_0} = 0$. Ч. Т. Д.

Предложение 5. Элементы e_s порождают G, и потому $\dim G = 2^d$.

Доказательство. Пусть $w_1, \ldots, w_d$ — базис в W. При $s=\{i_1, \ldots, i_p\}$, $i_1<i_2< \ldots <i_p$, полагаем $w_s=(w_{i_1}, \ldots, w_{i_p})$. Пусть $e_1, \ldots, e_d$ — сопряженный базис в V. Тогда, в силу предложения 3, $e_s(w_s)=1$, $e_s(w_t)=0$, если $s\neq t$. Теперь для $f\in G^p$ имеем

$$f\left(\sum a_{1i}w_i, \ldots, \sum a_{pi}w_i\right)=$$
$$=\sum_{i_1, \ldots, i_p} a_{1i_1} \ldots a_{pi_p} f\left(w_{i_1}, \ldots, w_{i_p}\right)=$$
$$=\sum_{s\in P}\ \sum_{\{i_1, \ldots, i_p\}=s} \operatorname{sgn}(\pi(i_1, \ldots, i_p))\, a_{1i_1} \ldots a_{pi_p} f(w_s),$$

где $\pi(i_1, \ldots, i_p)$ — подстановка, располагающая индексы $i_1, \ldots, i_p$ в возрастающем порядке.

Применение этой формулы к $f=e_s$ дает

$$e_s\left(\sum a_{1i}w_i, \ldots, \sum a_{pi}w_i\right)=$$
$$=\sum_{\{i_1, \ldots, i_p\}=s} \operatorname{sgn}(\pi(i_1, \ldots, i_p))\, a_{1i_1} \ldots a_{pi_p}.$$

Отсюда $f=\sum\limits_{s\in P} f(w_s)\, e_s$.

Задача 10. Показать, что тасующие подстановки образуют сечение, и выписать с их помощью всевозможные произведения при $p, q\leqslant 2$.

Задача 11. Пусть в множестве всех полилинейных альтернирующих функций на W определено новое произведение: если $f\in G^p$, $g\in G^q$, $p, q\geqslant 1$, то $f*g=a_{pq}fg$, где a_{pq} — ненулевой элемент F, а fg — прежнее произведение. Для того чтобы $G=\sum G^l$ являлось алгеброй Грассмана над V относительно умножения $*$, должно выполняться равенство $a_{pq}=a_{qp}$ и некоторое условие, эквивалентное ассоциативному закону. Вывести это условие и с его помощью выразить a_{pq} через $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1d-1}$. Обратно, показать, что a_{1j} можно выбрать произвольно и что при $a_{1j}=j+1$ формулой для $f*g$ служит

$$f*g(z)=\sum_{\pi\in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\pi)\, f(z\circ\pi)\, g(z\circ\pi\circ A_p).$$

Эту формулу можно использовать для определения умножения вместо той, которая была приведена, но ее нельзя применить, когда характеристика поля F является простым числом $\leqslant d$. Наша формула содержит наименьшие возможные члены.

Задача 12. Пусть $e=\{e_1, \ldots, e_d\}$ — базис в V, $\mathscr{L}=\mathfrak{gl}(V)$, $J:\mathscr{L}\to V^d$ — изоморфизм $\mathscr{L}$ на d-кратное декартово произведение V, заданный равенством $J(T)=(Te_1, \ldots, Te_d)$, $f\in G^d(W)$ — единственный элемент из $G^d(W)$, для которого $f(e_1, \ldots, e_d)=1$ (f — альтернирующая d-линейная функция на V^d). Доказать, что $\det = f\circ J:\mathscr{L}\to F$.

Задача 13. Пусть $f\in G^d(F^{d*})$ — единственная альтернирующая d-линейная функция на $(F^d)^d$, множестве $d\times d$-матриц, для которой $f(I)=1$. Показать, что f — обычный определитель матриц.

Задача 14. Описать естественный изоморфизм $G(V^*)$ и $G(V)^*$. С помощью этого показать, что скалярное произведение на V естественно продолжается до скалярного произведения на $G(V)$, поскольку скалярное произведение приводит к изоморфизму V и V^*, который однозначно распространяется до изоморфизма алгебр $G(V)$ и $G(V^*)$. Вывести также выражения в терминах базиса для скалярного произведения на $G(V)$.

4.5. Дифференциальные формы

С этого момента нас будет интересовать случай, когда $V=M_m^*$, m — точка многообразия M, $W=M_m$, $G_m=G(M_m^*)$. Таким образом, если $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система в m, то $dx_1, \ldots, dx_d$ образуют базис M_m^*, так что каждый элемент $f\in G_m^p$ однозначно представим в виде $f=\sum_{s\in P} a_s\,dx_s$.

Дифференциальная p-форма на M — это функция θ, определенная на некотором подмножестве $E\subset M$, значением которой в каждой точке $m\in E$ служит элемент пространства $G_m{}^d$. Функция θ является *p-формой* класса