Эту формулу можно использовать для определения умножения вместо той, которая была приведена, но ее нельзя применить, когда характеристика поля F является простым числом $\leqslant d$. Наша формула содержит наименьшие возможные члены.

Задача 12. Пусть $e=\{e_1, \ldots, e_d\}$ — базис в V, $\mathscr{L}=\mathfrak{gl}(V)$, $J:\mathscr{L}\to V^d$ — изоморфизм $\mathscr{L}$ на d-кратное декартово произведение V, заданный равенством $J(T)=(Te_1, \ldots, Te_d)$, $f\in G^d(W)$ — единственный элемент из $G^d(W)$, для которого $f(e_1, \ldots, e_d)=1$ (f — альтернирующая d-линейная функция на V^d). Доказать, что $\det = f\circ J:\mathscr{L}\to F$.

Задача 13. Пусть $f\in G^d(F^{d*})$ — единственная альтернирующая d-линейная функция на $(F^d)^d$, множестве $d\times d$-матриц, для которой $f(I)=1$. Показать, что f — обычный определитель матриц.

Задача 14. Описать естественный изоморфизм $G(V^*)$ и $G(V)^*$. С помощью этого показать, что скалярное произведение на V естественно продолжается до скалярного произведения на $G(V)$, поскольку скалярное произведение приводит к изоморфизму V и V^*, который однозначно распространяется до изоморфизма алгебр $G(V)$ и $G(V^*)$. Вывести также выражения в терминах базиса для скалярного произведения на $G(V)$.

4.5. Дифференциальные формы

С этого момента нас будет интересовать случай, когда $V=M_m^*$, m — точка многообразия M, $W=M_m$, $G_m=G(M_m^*)$. Таким образом, если $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система в m, то $dx_1, \ldots, dx_d$ образуют базис M_m^*, так что каждый элемент $f\in G_m^p$ однозначно представим в виде $f=\sum_{s\in P} a_s\,dx_s$.

Дифференциальная p-форма на M — это функция θ, определенная на некотором подмножестве $E\subset M$, значением которой в каждой точке $m\in E$ служит элемент пространства $G_m{}^d$. Функция θ является *p-формой* класса

C^∞, если для любой системы векторных C^∞-полей $V_1, \ldots$ $\ldots, V_p$ на M функция $\theta(V_1, \ldots, V_p)$, заданная на пересечении областей определения θ и $V_1, \ldots, V_p$ равенством

$$\theta(V_1, \ldots, V_p)(m) = \theta_m(V_1(m), \ldots, V_p(m)),$$

принадлежит C^∞. Здесь θ_m — значение функции θ в точке m. По возможности знак «m» будет опускаться.

0-форма — это просто вещественная функция на M. Отметим, что θ принадлежит C^∞ тогда и только тогда, когда для любой координатной системы $(x_1, \ldots, x_d)$ в (единственном) представлении $\theta = \sum_{s \in P} a_s dx_s$ все a_s принадлежат C^∞.

Другой подход. Установим связь нашего определения с тем, о котором говорилось в § 3.3. Сначала образуем следующие тензорные расслоения над M:

$$G^p = \bigcup_{m \in M} G_m{}^p.$$

Проекцией этого расслоения служит естественное отображение $\pi : G_m{}^p \to m$. Дифференцируемая структура задается набором координатных окрестностей вида $\bar{V} = \bigcup_{m \in V} G_m{}^p$, где V — координатная окрестность в M с координатами $x_1, \ldots, x_d$, а координатная система в $\bar{V}$ состоит из $x_1 \circ \pi, \ldots, x_d \circ \pi$ и еще $\binom{d}{p}$ функций w_s, $s \in P$, сопряженных с базисом $\{dx_s\}$ пространства $G_m{}^p$ в каждой точке V.

Иначе говоря, если R^{d*} — сопряженное к евклидову d-пространству R^d, то каждый элемент из $Gl(d, R)$ действует на R^{d*} как свой транспонированный обратный и, значит, после продолжения до соответствующего гомоморфизма действует также на $G(R^{d*})^p$. Таким образом, G^p — расслоение, ассоциированное с расслоением базисов $B(M)$ относительно этого действия [см. § 3.3, п. (3)].

Теперь *дифференциальной p-формой* на $E \subset M$ является сечение G^p над E, т. е. отображение $\theta : E \to G^p$, для которого $\pi \circ \theta$ — тождественное отображение; $\theta \in C^\infty$, если θ является C^∞-отображением.

Ориентация. Пусть E — векторное расслоение над M; обозначим через E_0 множество всех ненулевых векторов в E. Множество E_0 открыто в E.

Если M связно, то $G^d{}_0$ либо связно, либо распадается в точности на две компоненты связности. Это сразу следует из того, что всякий путь в M можно поднять в $G^d{}_0$, а каждый слой в $G^d{}_0$ имеет в точности две компоненты связности (d — размерность M).

Многообразие M *ориентируемо*, если $G^d{}_0$ состоит из двух компонент. В этом случае каждая компонента $G^d{}_0$ называется ориентацией многообразия M; M *неориентируемо*, если $G^d{}_0$ связно.

Лемма 3. Паракомпактное многообразие M ориентируемо в том и только в том случае, если M допускает непрерывную, нигде не обращающуюся в нуль d-форму, заданную на всем M.

Доказательство. Предположим, что θ — непрерывная определенная всюду d-форма со значениями в $G^d{}_0$. Пусть γ — произвольная кривая в $G^d{}_0$, которая начинается и кончается в одном и том же слое $G_m{}^d{}_0$ ненулевых элементов из $G_m{}^d$. Так как $G_n{}^d$ — одномерное пространство при любом $n \in M$, то $\gamma(t) = \alpha(t)\theta(\pi \circ \gamma(t))$, где α — непрерывная вещественная функция. Но $\alpha(t)$ нигде не обращается в нуль и потому имеет постоянный знак. Поэтому начальная и конечная точки кривой $\gamma(t)$ принадлежат одной и той же компоненте $G_m{}^d{}_0$. Значит, $G^d{}_0$ не связно и M ориентируемо.

Обратно, предположим, что M ориентируемо. Пусть $\{U_i\}$ — локально конечное покрытие M связными координатными окрестностями, $\{f_i\}$ — ассоциированное C^∞-разложение единицы. Выберем ориентацию M. Тогда для произвольной связной координатной окрестности U с ассоциированными координатами $x_1, \ldots, x_d$ форма $\varphi = dx_D$ является непрерывным сечением U над $G^d{}_0$, так что либо φ, либо $-\varphi$ принадлежит выбранной ориентации. Так получаются φ_i, определенные на U_i, со значениями в выбранной ориентации, но тогда $\theta = \sum f_i \varphi_i$ определяет нужную ненулевую d-форму класса C^∞. Ч. Т. Д.

Если M ориентируемо, то такая форма θ называется *элементом объема* многообразия M.

Если M не связно, то говорят, что M ориентируемо, если каждая компонента M ориентируема, и *ориентацией* M служит набор ориентаций всех компонент.

Есть и другие условия, эквивалентные ориентируемости, которые иногда выступают как определения. Вот они:

(1) M так покрывается координатными окрестностями, что любые две системы координат связаны системой уравнений, имеющих положительный определитель Якоби.

(2) (Когда M связно.) Пространство расслоения базисов $B(M)$ не связно. Тогда пространство $B(M)$ имеет в точности две компоненты, каждая из которых представляет ориентацию M.

Задача 15. Доказать, что следующие многообразия ориентируемы:

(а) касательное расслоение любого многообразия;

(б) параллелизуемые многообразия, в частности группы Ли;

(в) комплексные и почти комплексные многообразия.

4.6. Внешняя производная

Внешней производной d называется отображение, относящее каждой p-форме θ класса C^∞ некоторую $(p+1)$-форму $d\theta$ класса C^∞, такую, что

(I) если $p=0$, то $d\theta$ совпадает с дифференциалом C^∞-функции θ (см. § 4.1),

(II) область определения $d\theta$ совпадает с областью определения θ,

(III) отображение d линейно над R,

(IV) если θ является p-формой, φ является q-формой, то $d(\theta\varphi) = (d\theta)\varphi + (-1)^p \theta (d\varphi)$,

(V) $d(d\theta) = 0$ для всех θ.