в выбранной ориентации, но тогда $\theta = \sum f_i \varphi_i$ определяет нужную ненулевую d-форму класса C^∞. Ч. Т. Д.

Если M ориентируемо, то такая форма θ называется *элементом объема* многообразия M.

Если M не связно, то говорят, что M ориентируемо, если каждая компонента M ориентируема, и *ориентацией* M служит набор ориентаций всех компонент.

Есть и другие условия, эквивалентные ориентируемости, которые иногда выступают как определения. Вот они:

(1) M так покрывается координатными окрестностями, что любые две системы координат связаны системой уравнений, имеющих положительный определитель Якоби.

(2) (Когда M связно.) Пространство расслоения базисов $B(M)$ не связно. Тогда пространство $B(M)$ имеет в точности две компоненты, каждая из которых представляет ориентацию M.

Задача 15. Доказать, что следующие многообразия ориентируемы:

(а) касательное расслоение любого многообразия;

(б) параллелизуемые многообразия, в частности группы Ли;

(в) комплексные и почти комплексные многообразия.

4.6. Внешняя производная

Внешней производной d называется отображение, относящее каждой p-форме θ класса C^∞ некоторую $(p+1)$-форму $d\theta$ класса C^∞, такую, что

(I) если $p=0$, то $d\theta$ совпадает с дифференциалом C^∞-функции θ (см. § 4.1),

(II) область определения $d\theta$ совпадает с областью определения θ,

(III) отображение d линейно над R,

(IV) если θ является p-формой, φ является q-формой, то $d(\theta\varphi) = (d\theta)\varphi + (-1)^p\theta(d\varphi)$,

(V) $d(d\theta) = 0$ для всех θ.

Теорема 1. Существует самое большее одно отображение, удовлетворяющее условиям (I)—(V).

Доказательство. Если на пересечении областей определения θ и x_i записать θ в виде $\sum_{s \in P} a_s\, dx_s$, то

$$\begin{aligned} d\theta &= \sum_{s \in P} d(a_s\, dx_s) && [\text{в силу (III)}] \\ &= \sum_{s \in P} (da_s\, dx_s + a_s d(dx_s)) && [\text{в силу (IV)}]. \end{aligned} \tag{1}$$

Далее, в силу (IV) и (V),

$$d(dx_s) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1}\, dx_{i_1} \ldots d(dx_{i_j}) \ldots dx_{i_p} = 0.$$

Поэтому $d\theta = \sum_{s \in P} \sum_{j=1}^{p} D_{x_j} a_s\, dx_j\, dx_s$ — единственно возможное представление для $d\theta$.

В этом рассуждении есть один пробел, а именно, когда в левой части (1) мы применяли d к сужению θ на пересечение областей определения θ и $\{x_i\}$, то неявно подразумевалось, что результат совпадает с сужением $d\theta$ на это пересечение. Аналогичное замечание относится к правой части (1). Поэтому мы должны еще показать, что если θ и φ совпадают на открытом множестве U, то $d\theta$ и $d\varphi$ также совпадают на U. Для этого возьмем функцию f с областью определения U, равную 1 в каждой точке U. Тогда $f\theta$ и $f\varphi$ равны и определены в одной и той же области U. В силу (I), $df=0$, откуда, в силу (IV),

$$d\theta|_U = f d\theta = d(f\theta) = d(f\varphi) = f d\varphi = d\varphi|_U,$$

что и требовалось. Это завершает доказательство теоремы.

Итак, мы нашли координатное выражение внешней производной d. Для доказательства существования d следовало бы доказать согласованность этих выражений в перекрывающихся координатных окрестностях. Однако это совсем нетрудно, поскольку можно проверить (I)—(V) для координатной окрестности, после чего единственность и согласованность относительно сужения на меньшую область дадут согласованность на пересечениях координатных окрестностей. Теперь мы выведем инвариантную формулу для d, которая будет широко применяться в дальнейшем.

Инвариантная формула для d. Пусть θ есть p-форма класса C^∞. Построим с ее помощью R-$(p+1)$-линейную функцию $\bar\theta$ на совокупности $(p+1)$-наборов векторных C^∞-полей со значениями в пространстве C^∞-функций на M:

$$\bar\theta(V_1, \ldots, V_{p+1}) =$$
$$= \sum_i (-1)^{i-1} V_i\theta(V_1, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_{p+1}) +$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \theta([V_i, V_j], V_1, \ldots$$
$$\ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_{j-1}, V_{j+1}, \ldots, V_{p+1}).$$

Пусть $t_1, \ldots, t_{p+1} \in M_m$, где m — точка из области определения θ: возьмем векторные поля $V_1, \ldots, V_{p+1}$, такие, что $V_i(m) = t_i$. Положим $d\theta(t_1, \ldots, t_{p+1}) = \bar\theta(V_1, \ldots, V_{p+1})(m)$.

Мы должны показать, что это определение не зависит от выбора $V_1, \ldots, V_{p+1}$. Нам потребуется ряд лемм.

Лемма 4. Если V_i и W_i совпадают в окрестности точки m, $i=1, \ldots, p+1$, то $\bar\theta(V_1, \ldots, V_{p+1})(m) = \bar\theta(W_1, \ldots, W_{p+1})(m)$.

Доказательство. Это ясно из определения $\bar\theta$.

Лемма 5. (а) $\bar\theta(fV_1, V_2, \ldots, V_{p+1}) = f\bar\theta(V_1, \ldots, V_{p+1})$.

(б) $\bar\theta$ — альтернирующая функция, т. е.

$$\bar\theta(V_1, \ldots, V_i, \ldots, V_j, \ldots, V_{p+1}) =$$
$$= -\bar\theta(V_1, \ldots, V_j, \ldots, V_i, \ldots, V_{p+1}).$$

(в) $\bar\theta(V_1, \ldots, fV_i, \ldots, V_{p+1}) = f\bar\theta(V_1, \ldots, V_{p+1})$.

Доказательство. (а) вытекает из задачи 1.14 и определения $\bar\theta$; (б) немедленно получается из определения $\bar\theta$; (в) вытекает из (а) и (б).

Лемма 6. Определение $d\theta$ корректно, т. е. $\bar{\theta}(V_1, \ldots, V_{p+1})(m)$ не зависит от выбора полей V_i при условии, что $t_i = V_i(m)$.

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_d$ — координаты в m. Тогда $V_i = \sum_j a_{ij} D_{x_j}$ в окрестности m. Если $W_i(m) = V_i(m)$, то $W_i = \sum_j b_{ij} D_{x_j}$ и $a_{ij}(m) = b_{ij}(m)$ при всех i, j. По лемме 4 можно ограничиться рассмотрением $\bar{\theta}$ лишь в этой координатной системе. В силу (в) леммы 5,

$$\bar{\theta}(V_1, \ldots, V_{p+1})(m) = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j_i=1}^{d} a_{ij_i}(m)\,\bar{\theta}(D_{x_{j_1}}, \ldots, D_{x_{j_{p+1}}})(m) = \bar{\theta}(W_1, \ldots, W_{p+1})(m).$$

Ч. Т. Д.

Теорема 2. Отображение $\theta \to d\theta$, определенное с помощью вышеуказанного $\bar{\theta}$, является внешней производной, т. е. удовлетворяет условиям (I)—(V).

Доказательство. Свойства (II) и (III) следуют из определения. Свойство (I) мы проверим непосредственно; а именно пусть $\theta = f \in C^\infty$, покажем, что $d\theta = df$. Пусть $t \in M_m$, V — векторное поле, для которого $V(m) = t$. Далее, $\bar{\theta}(V) = (-1)^{1-1} Vf$, поскольку остальные члены пропадают. Поэтому в точке m

$$d\theta(t) = \bar{\theta}(V)(m) = V(m)f = tf = df(t),$$

что и требовалось доказать.

Для проверки остальных свойств мы покажем, что d совпадает с операцией, локально определенной при доказательстве теоремы 1. Пусть $\tilde{d}$ обозначает эту операцию, т. е. в координатной системе $x_1, \ldots, x_d$ имеем для $\theta = \sum_{s \in P} a_s\, dx_s$

$$\tilde{d}\theta = \sum_{s \in P} \sum_j D_{x_j} a_s\, dx_j\, dx_s.$$

Отметим, что соответствия $\theta \to d\theta$ и $\theta \to \tilde{d}\theta$ оба R-линейны. Далее, если θ и φ совпадают на некоторой окрестности, то $d\theta$ и $d\varphi$ также совпадают на этой окрестности. Поэтому достаточно проверить, что рассматриваемые операции одинаковы при $\theta = f dx_s$, причем, в силу линейности форм, достаточно показать, что $d\theta$ и $\tilde{d}\theta$ совпадают на $(V_1, \ldots, V_{p+1})$, где $V_i = D_{x_{j_i}}$:

$$\tilde{d}\theta(V_1, \ldots, V_{p+1}) = \sum_k D_{x_k} f\, dx_k\, dx_s(V_1, \ldots, V_{p+1}) =$$
$$= \sum_k D_{x_k} f \sum_{\pi \in K} \operatorname{sgn}(\pi)\, dx_k(V_{\pi 1})\, dx_s(V_{\pi 2}, \ldots, V_{\pi(p+1)}),$$

где K — сечение подгруппы $S_1 S_p$ в S_{p+1}. С помощью тасующих подстановок $\pi 2 < \ldots < \pi(p+1)$ последнее выражение превращается в

$$\sum_k D_{x_k} f \sum_{m=1}^{p+1} (-1)^{m-1} \delta_{k j_m} \times$$
$$\times\, dx_s(V_1, \ldots, V_{m-1}, V_{m+1}, \ldots, V_{p+1}) =$$
$$= \sum_m (-1)^{m-1} D_{x_{j_m}} f\, dx_s(V_1, \ldots, V_{m-1}, V_{m+1}, \ldots, V_{p+1}).$$

С другой стороны, так как $[V_i, V_j] = 0$, то

$$d\theta(V_1, \ldots, V_{p+1}) =$$
$$= \sum_{m=1}^{p+1} (-1)^{m-1} V_m (f\, dx_s(V_1, \ldots, V_{m-1}, V_{m+1}, \ldots, V_{p+1})),$$

что, поскольку $dx_s(V_1, \ldots, V_{m-1}, V_{m+1}, \ldots, V_{p+1}) = \mathrm{const}$, совпадает с

$$\sum_m (-1)^{m-1} D_{x_{j_m}} f\, dx_s(V_1, \ldots, V_{m-1}, V_{m+1}, \ldots, V_{p+1}).$$

Ч. Т. Д.

Задача 16. Выписать полностью инвариантное выражение для $d\theta$, когда θ является 1-формой и 2-формой. В последнем случае, используя кососимметричность, представить ее в виде суммы по циклическим подстановкам чисел 1, 2, 3.

Задача 17. Пусть U, V, W — постоянные векторные поля (все скобки — нули) на R^3 и X — векторное C^∞-поле. Установить соответствие между исчислением дифференциальных форм и обычным векторным анализом, чтобы получить следующие формулы.

Из инвариантной формулы для d:

$$\operatorname{grad} f \cdot U = Uf, \quad \operatorname{curl} X \cdot U \times V = U(X \cdot V) - V(X \cdot U),$$
$$(\operatorname{div} X)\, U \cdot V \times W = U(X \cdot V \times W) + V(X \cdot W \times U) + W(X \cdot U \times V).$$

(С помощью этих формул можно определять grad, curl, div.)

Из аксиомы (IV) для d:

$$\operatorname{grad}(fg) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g,$$
$$\operatorname{curl}(fX) = (\operatorname{grad} f) \times X + f \operatorname{curl} X,$$
$$\operatorname{div}(fX) = (\operatorname{grad} f) \cdot X + f \operatorname{div} X,$$
$$\operatorname{div}(X \times Y) = (\operatorname{curl} X) \cdot Y - X \cdot \operatorname{curl} Y.$$

Из аксиомы (V) для d:

$$\operatorname{curl} \operatorname{grad} f = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{curl} X = 0.$$

4.7. Действие отображений

Пусть M, N — многообразия, а $\varphi : M \to N$ есть C^∞-отображение, тогда, как мы знаем, отображение φ посредством композиции преобразует функции на N в функции на M, а касательные к M — в касательные к N. Теперь мы определим отображение φ^* форм на N в формы на M, $\varphi^* : \theta \to \theta \circ d\varphi$, так что если θ есть p-форма на N, то

$$\varphi^*(\theta)(t_1, \ldots, t_p) = \theta(d\varphi t_1, \ldots, d\varphi t_p).$$

Заметим, что на пространстве 1-форм в некоторой точке отображением φ^* является обычное линейное сопряженное с отображением $d\varphi$.

Теорема 3. Отображение φ^* является гомоморфизмом грассмановой алгебры, коммутирующим с внешней производной.