Задача 17. Пусть U, V, W — постоянные векторные поля (все скобки — нули) на R^3 и X — векторное C^∞-поле. Установить соответствие между исчислением дифференциальных форм и обычным векторным анализом, чтобы получить следующие формулы.

Из инвариантной формулы для d:

$$\operatorname{grad} f \cdot U = Uf, \quad \operatorname{curl} X \cdot U \times V = U(X \cdot V) - V(X \cdot U),$$
$$(\operatorname{div} X)\, U \cdot V \times W = U(X \cdot V \times W) + V(X \cdot W \times U) + W(X \cdot U \times V).$$

(С помощью этих формул можно определять grad, curl, div.)

Из аксиомы (IV) для d:

$$\operatorname{grad}(fg) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g,$$
$$\operatorname{curl}(fX) = (\operatorname{grad} f) \times X + f \operatorname{curl} X,$$
$$\operatorname{div}(fX) = (\operatorname{grad} f) \cdot X + f \operatorname{div} X,$$
$$\operatorname{div}(X \times Y) = (\operatorname{curl} X) \cdot Y - X \cdot \operatorname{curl} Y.$$

Из аксиомы (V) для d:

$$\operatorname{curl} \operatorname{grad} f = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{curl} X = 0.$$

4.7. Действие отображений

Пусть M, N — многообразия, а $\varphi : M \to N$ есть C^∞-отображение, тогда, как мы знаем, отображение φ посредством композиции преобразует функции на N в функции на M, а касательные к M — в касательные к N. Теперь мы определим отображение φ^* форм на N в формы на M, $\varphi^* : \theta \to \theta \circ d\varphi$, так что если θ есть p-форма на N, то

$$\varphi^*(\theta)(t_1, \ldots, t_p) = \theta(d\varphi t_1, \ldots, d\varphi t_p).$$

Заметим, что на пространстве 1-форм в некоторой точке отображением φ^* является обычное линейное сопряженное с отображением $d\varphi$.

Теорема 3. Отображение φ^* является гомоморфизмом грассмановой алгебры, коммутирующим с внешней производной.

Доказательство. То, что φ^* — гомоморфизм алгебры Грассмана, получается автоматически из определения умножения.

Для доказательства того, что φ^* коммутирует с d, отметим вначале, что и φ^* и d являются R-линейными отображениями, а также что это локальная проблема. Локально формы порождаются функциями и дифференциалами функций. Пользуясь тем, что φ^* — гомоморфизм, а d — антидифференцирование, ограничимся рассмотрением отдельных множителей слагаемых, т. е. функций и их дифференциалов. Но для произвольной функции f на N имеем

$$\varphi^* df = df \circ d\varphi = d(f \circ \varphi) = d(\varphi^* f)$$

и

$$d(\varphi^* df) = d(d(f \circ \varphi)) = 0 = \varphi^*(0) = \varphi^*(d(df)).$$ Ч. Т. Д.

Пример. Пусть $\theta = u_2 du_1 + u_3 du_2 + u_1 du_3$ и отображение $\varphi: R^2 \to R^3$ задано формулой $\varphi = (\sin u_1 \cos u_2, \sin u_1 \sin u_2, \cos u_1)$; тогда

$$\begin{aligned}\varphi^*\theta &= \sin u_1 \sin u_2 d(\sin u_1 \cos u_2) + \cos u_1 d(\sin u_1 \sin u_2) + \\ &+ \sin u_1 \cos u_2 d\cos u_1 = \\ &= (\sin u_1 \cos u_1 \sin u_2 \cos u_2 + \cos^2 u_1 \sin u_2 - \\ &- \sin^2 u_1 \cos u_2)\, du_1 + \\ &+ (-\sin^2 u_1 \sin^2 u_2 + \sin u_1 \cos u_1 \cos u_2)\, du_2.\end{aligned}$$

Задача 18. Обозначим через $\mathcal{K}(M)$ совокупность всех C^∞-форм, определенных на открытых подмножествах M, через $\mathcal{K}^p(M)$ — совокупность p-форм класса C^∞; символ (M) мы будем иногда опускать.

Векторное поле X определяет линейную функцию $i(X): \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, удовлетворяющую следующим условиям:

(а) $i(X): \mathcal{K}^p \to \mathcal{K}^{p-1}$, $p \geqslant 1$, $i(X)(\mathcal{K}^0) = 0$;

(б) $i(X)$ является антидифференцированием, т. е. если $\theta \in \mathcal{K}^p$, $\varphi \in \mathcal{K}^q$, то $i(X)(\theta\varphi) = (i(X)\theta)\varphi + (-1)^p \theta (i(X)\varphi)$;

(в) если $\theta \in \mathcal{K}^1$, то $i(X)\theta = \theta(X)$.

Показать, что существует единственная функция, удовлетворяющая условиям (а)—(в), и проверить формулу $i(X)\theta(X_1, \ldots, X_{p-1}) = \theta(X, X_1, \ldots, X_{p-1})$, где $\theta \in \mathcal{K}^p$ и $X_1, \ldots, X_{p-1}$ — векторные поля.

Задача 19. Показать, что действие производной Ли L_X по полю X является дифференцированием на $\mathcal{K}$. Показать, что $i(X)d + di(X)$ является дифференцированием. Вывести отсюда формулу

$$L_X = i(X)d + di(X),$$

проверив ее для функций и их дифференциалов.

Задача 20. Пусть G — группа Ли, $X_1, \ldots, X_d$ — базис левоинвариантных векторных полей на G, $c_{ij}{}^k$ — константы (так называемые *структурные константы*), входящие в разложение $[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}{}^k X_k$. Определим 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_d$, сопряженные с $X_i : \omega_i(X_j) = \delta_{ij}$ (константы). Доказать, что

(а) форма ω_i левоинвариантна, т. е. $L_g{}^*\omega_i = \omega_i$ для каждого $g \in G$;

(б) $d\omega_i = -\frac{1}{2}\sum_{j,k} c_{jk}{}^i\omega_j\omega_k = \sum_{j<k} c_{jk}{}^i\omega_k\omega_j$. (Это так называемое уравнение Маурера — Картана.)

4.8. Теорема Фробениуса

Отображение, относящее каждому $m \in M$ некоторое k-мерное подпространство E_m в пространстве $G_m{}^1$, мы называем *k-мерным кораспределением* E на многообразии M. E является *C^∞-кораспределением*, если для любого $m \in M$ найдется окрестность, на которой определено k 1-форм класса C^∞, порождающих E в каждой точке этой окрестности. Подмногообразие N в M называется *интегральным подмногообразием кораспределения* E, если для каждого $n \in N$ множество линейных функций E_n служит аннулятором подпространства $dI(N_n)$, где $I : N \to M$ — отображение вложения. Кораспределение E *вполне интегрируемо*, если через каждую точку $m \in M$ проходит некоторое интегральное подмно-