Показать, что существует единственная функция, удовлетворяющая условиям (а)—(в), и проверить формулу $i(X)\theta(X_1, \ldots, X_{p-1}) = \theta(X, X_1, \ldots, X_{p-1})$, где $\theta \in \mathcal{K}^p$ и $X_1, \ldots, X_{p-1}$ — векторные поля.

Задача 19. Показать, что действие производной Ли L_X по полю X является дифференцированием на $\mathcal{K}$. Показать, что $i(X)d + di(X)$ является дифференцированием. Вывести отсюда формулу

$$L_X = i(X)d + di(X),$$

проверив ее для функций и их дифференциалов.

Задача 20. Пусть G — группа Ли, $X_1, \ldots, X_d$ — базис левоинвариантных векторных полей на G, $c_{ij}{}^k$ — константы (так называемые *структурные константы*), входящие в разложение $[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}{}^k X_k$. Определим 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_d$, сопряженные с $X_i : \omega_i(X_j) = \delta_{ij}$ (константы). Доказать, что

(а) форма ω_i левоинвариантна, т. е. $L_g{}^*\omega_i = \omega_i$ для каждого $g \in G$;

(б) $d\omega_i = -\frac{1}{2} \sum_{j, k} c_{jk}{}^i \omega_j \omega_k = \sum_{j<k} c_{jk}{}^i \omega_k \omega_j$. (Это так называемое уравнение Маурера — Картана.)

4.8. Теорема Фробениуса

Отображение, относящее каждому $m \in M$ некоторое k-мерное подпространство E_m в пространстве $G_m{}^1$, мы называем *k-мерным кораспределением* E на многообразии M. E является *C^∞-кораспределением*, если для любого $m \in M$ найдется окрестность, на которой определено k 1-форм класса C^∞, порождающих E в каждой точке этой окрестности. Подмногообразие N в M называется *интегральным подмногообразием кораспределения* E, если для каждого $n \in N$ множество линейных функций E_n служит аннулятором подпространства $dI(N_n)$, где $I : N \to M$ — отображение вложения. Кораспределение E *вполне интегрируемо*, если через каждую точку $m \in M$ проходит некоторое интегральное подмногообразие E. *Распределением, ассоциированным с* E, называется $(d-k)$-распределение D, у которого D_m является аннулятором E_m.

Лемма 7. Пусть W_m — идеал, порожденный E_m в G_m. Тогда $\omega \in W_m{}^p$ в том и только в том случае, если $\omega(t_1, \ldots, t_p)=0$ при любых $t_1, \ldots, t_p \in D_m$.

Доказательство. Если $\theta_1, \ldots, \theta_k$ — базис E_m, то для $\omega \in W_m{}^p$ имеем $\omega = \sum\limits_i \varphi_i \theta_i$, $\varphi_i \in G_m{}^{p-1}$. Отсюда

$$\omega(t_1, \ldots, t_p) = \sum_i \varphi_i \theta_i (t_1, \ldots, t_p) =$$

$$= \sum_{i,\, j} (-1)^{p-j} \varphi_i (t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_p) \theta_i (t_j) = 0,$$

поскольку t_j как элементы пространства D_m аннулируют E_m.

Обратно, пусть $\omega(t_1, \ldots, t_p)=0$ при любых $t_1, \ldots$ $\ldots, t_p \in D_m$. Пусть $\theta_{k+1}, \ldots, \theta_d$ — дополнение системы $\theta_1, \ldots, \theta_k$ до базиса в $G_m{}^1$ и $e_1, \ldots, e_d$ — базис, сопряженный с $\theta_1, \ldots, \theta_d$. Тогда $e_{k+1}, \ldots, e_d$ порождают D_m, и если $\omega = \sum\limits_{s \in P} a_s \theta_s$, то при $k < j_1 < \ldots < j_p$

$$0 = \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = \sum_{s \in P} a_s \theta_s (e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = a_{j_1 \ldots j_p}.$$

Поэтому каждый член ω должен содержать θ_i для $i \leqslant k$, т. е. $\omega \in W_m{}^p$.

Теорема Фробениуса [79]. Пусть дано k-мерное C^∞-кораспределение E на M. Пусть W — функция, относящая каждому $m \in M$ идеал W_m, порожденный E_m в G_m. Тогда E вполне интегрируемо в том и только в том случае, если W инвариантно относительно действия внешней производной, т. е. $d(W) \subset W$.

Мы покажем, что эта теорема эквивалентна теореме 1.6, которая утверждает, что C^∞-распределение вполне интегрируемо в том и только в том случае, если оно инволютивно. Заметим сначала, что условие $d(W) \subset W$ эквивалентно утверждению, что для каждого $m \in M$ существует локальный базис 1-форм $\theta_1, \ldots, \theta_k$ в E, такой, что $d\theta_i \in W$.

Полная интегрируемость k-褐распределения E эквивалентна полной интегрируемости ассоциированного $(d-k)$-распределения D, которая эквивалентна инволютивности D, которая эквивалентна условию, что из $\theta_i(V_j)=0$ при $i=1, \ldots, k$; $j=1, 2$, следует $\theta_i([V_1, V_2])=0$, $i=1, \ldots, k$, которое эквивалентно условию, что из $\theta_i(V_j)=0$, $i=1, \ldots, k$; $j=1, 2$, следует $d\theta_i(V_1, V_2)=0$, $i=1, \ldots, k$ (теорема 2), которое эквивалентно $d\theta_i \in W$, $i=1, \ldots, k$ (лемма 7). Ч. Т. Д.

Задача 21. Вывести условие интегрируемости, данное в задаче 1.29, для 1-корaспределения, порожденного 1-формой $P du_1 + Q du_2 + R du_3$. (*Указание*: воспользоваться задачей 4.)

Задача 22. Пусть ω есть p-форма и $p \leqslant d-k$. Доказать, что ω тогда и только тогда принадлежит идеалу, порожденному линейно независимыми 1-формами $\theta_1, \ldots, \theta_k$, когда $\omega\theta_1 \ldots \theta_k = 0$.

С другой стороны, если $p > d-k$, то ω всегда принадлежит идеалу, порожденному $\theta_1, \ldots, \theta_k$, так что W оказывается пространством всех форм, аннулируемых умножением на $\theta_1, \ldots, \theta_k$.

4.9. Векторнозначные формы и операции

Пусть V — векторное пространство над R, M — многообразие; *V-значной p-формой на M* называется отображение ω, которое переводит каждый набор $t_1, \ldots, t_p \in M_m$ в некоторый элемент $\omega(t_1, \ldots, t_p) \in V$, такой, что если f — произвольный элемент пространства, сопряженного с V, то $f \circ \omega$ является *(вещественной)* p-формой на M.

Примеры. (1) Если $V=R^d$, то V-значная p-форма — это просто d-набор p-форм $(\omega_1, \ldots, \omega_d) = (u_1 \circ \omega, \ldots, u_d \circ \omega)$.

(2) Если $V = \mathfrak{gl}(R^d)$, алгебра Ли $d \times d$-матриц, то V-значная p-форма — это матрица p-форм (ω_{ij}).

Если φ есть $\mathfrak{g}$-значная p-форма, ω есть $\mathfrak{g}$-значная q-форма, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то определена $\mathfrak{g}$-значная