Полная интегрируемость k-кораспределения E эквивалентна полной интегрируемости ассоциированного $(d-k)$-распределения D, которая эквивалентна инволютивности D, которая эквивалентна условию, что из $\theta_i(V_j)=0$ при $i=1, \ldots, k$; $j=1, 2$, следует $\theta_i([V_1, V_2])=0$, $i=1, \ldots, k$, которое эквивалентно условию, что из $\theta_i(V_j)=0$, $i=1, \ldots, k$; $j=1, 2$, следует $d\theta_i(V_1, V_2)=0$, $i=1, \ldots, k$ (теорема 2), которое эквивалентно $d\theta_i \in W$, $i=1, \ldots, k$ (лемма 7). Ч. Т. Д.

Задача 21. Вывести условие интегрируемости, данное в задаче 1.29, для 1-кораспределения, порожденного 1-формой $P du_1+Q du_2+R du_3$. (*Указание*: воспользоваться задачей 4.)

Задача 22. Пусть ω есть p-форма и $p \leqslant d-k$. Доказать, что ω тогда и только тогда принадлежит идеалу, порожденному линейно независимыми 1-формами $\theta_1, \ldots, \theta_k$, когда $\omega\theta_1 \ldots \theta_k=0$.

С другой стороны, если $p>d-k$, то ω всегда принадлежит идеалу, порожденному $\theta_1, \ldots, \theta_k$, так что W оказывается пространством всех форм, аннулируемых умножением на $\theta_1, \ldots, \theta_k$.

4.9. Векторнозначные формы и операции

Пусть V — векторное пространство над R, M — многообразие; *V-значной p-формой на M* называется отображение ω, которое переводит каждый набор $t_1, \ldots, t_p \in M_m$ в некоторый элемент $\omega(t_1, \ldots, t_p) \in V$, такой, что если f — произвольный элемент пространства, сопряженного с V, то $f \circ \omega$ является *(вещественной)* p-формой на M.

Примеры. (1) Если $V=R^d$, то V-значная p-форма — это просто d-набор p-форм $(\omega_1, \ldots, \omega_d)= =(u_1 \circ \omega, \ldots, u_d \circ \omega)$.

(2) Если $V=\mathfrak{gl}(R^d)$, алгебра Ли $d \times d$-матриц, то V-значная p-форма — это матрица p-форм (ω_{ij}).

Если φ есть $\mathfrak{g}$-значная p-форма, ω есть $\mathfrak{g}$-значная q-форма, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то определена $\mathfrak{g}$-значная

$(p+q)$-форма $[\varphi, \omega]$:

$$[\varphi, \omega](t) = \sum_{\pi \in K} \operatorname{sgn}(\pi)\,[\varphi(t \circ \pi),\ \omega(t \circ \pi \circ A_p)],$$

где K — сечение подгруппы $S_p S'_q$ в S_{p+q}.

Заметим, что $[\varphi, \omega] = (-1)^{pq-1}[\omega, \varphi]$, так как при перестановке членов скобки появляется дополнительный множитель -1, помимо множителя $(-1)^{pq}$, возникающего из-за обращения порядка форм.

Если φ есть p-форма со значениями в пространстве линейных преобразований векторного пространства V и ω есть V-значная q-форма, то определена V-значная $(p+q)$-форма $\varphi\omega$:

$$\varphi\omega(t) = \sum_{\pi \in K} \operatorname{sgn}(\pi)\,\varphi(t \circ \pi)\,\omega(t \circ \pi \circ A_p),$$

где K — то же сечение.

Задача 23. Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Определим $\mathfrak{g}$-значную 1-форму ω на G вида $\omega(X) = X$ для каждого $X \in \mathfrak{g}$, т. е. если $x = X(g)$, то $\omega(x) = X$.

(а) Доказать, что форма ω левоинвариантна.

(б) Доказать, что $d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]$.

(в) Если $X_1, \ldots, X_d$ — базис в $\mathfrak{g}$, то разложение $\omega(x) = \sum_i \omega_i(x) X_i$ определяет вещественные 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_d$. Доказать, что $\omega_1, \ldots, \omega_d$ совпадают с формами из задачи 20, так что формула (б) — это бескоординатная запись уравнений Маурера — Картана.

Задача 24. (а) Пусть φ, ω суть $\mathfrak{gl}(d, R)$-значные формы; определить произведение $\varphi\omega$ с помощью матричного умножения, а не скобочной операции, как указано выше.

(б) Показать, что $[\varphi, \varphi](X, Y) = 2[\varphi(X), \varphi(Y)] = 2\varphi\varphi(X, Y)$, когда φ является 1-формой.