ГЛАВА 5

Связности

В этой главе на главном расслоении определяются связность, горизонтальный подъем кривой и параллельный перенос, вводятся форма кривизны и структурное уравнение, а также рассматриваются вопросы, связанные с существованием связностей, связностями на ассоциированных расслоениях и структурными уравнениями для горизонтальных форм; наконец, в серии задач развивается теория групп голономии [22, 32, 33, 51].

5.1. Определения и элементарные свойства

Понятие связности весьма удобно для описания некоторой дифференциальной геометрической структуры на многообразии; в частном случае, рассматриваемом в следующей главе, оно эквивалентно более привычному понятию параллельного переноса. Связности ассоциируются с главными расслоениями над многообразием, и большей частью мы будем рассматривать только связности на расслоении базисов. Однако многие фундаментальные свойства связностей имеют место на общем главном расслоении; их мы и выведем в настоящей главе.

Пусть P — пространство главного расслоения над M со структурной группой G и проекцией $\pi: P \to M$.

Пусть V есть $\dim(G)$-мерное распределение *вертикальных векторов* на P, т. е.

$$V_p = \{t \in P_p \mid d\pi t = 0\}, \qquad p \in P.$$

Напомним, что существует гомоморфизм $\lambda: \mathfrak{g} \to \overline{\mathfrak{g}}$, определенный правым действием G на P (§ 3.1): если $X \in \mathfrak{g}$, $p \in P$, то $(\lambda X)(p) = dp(X(e))$, где p рассматривается как вложение $p(g)=pg$ группы G в P. Элементы пространства $\bar{\mathfrak{g}}$ вертикальны, поскольку если $\bar{X}=\lambda X$, то

$$d\pi(\bar{X}(p))=d\pi\, dp(X(e))=0,$$

так как $\pi\circ p$ — постоянное отображение $G\to\pi(p)$. Далее, для всякого $t\in V_p$ найдется поле $\bar{X}\in\bar{\mathfrak{g}}$, такое, что $\bar{X}(p)=t$, так как p отображает G на $\pi^{-1}(\pi(p))$. Следовательно, элементы $\bar{\mathfrak{g}}$ порождают все вертикальное пространство в каждой точке; это показывает, что V — действительно распределение размерности, равной $\dim(\mathfrak{g})=\dim(G)$, а также что $V\in C^\infty$. В самом деле, если U— выделенная окрестность точки $\pi(p)$, F_U — ассоциированное отображение в G, то отображение $p: G\to\pi^{-1}(m)$ представляется в виде $p=(\pi\times F_U)^{-1}(m, L_{F_U(p)})$, откуда и получаются требуемые свойства (см. замечание в начале § 3.2).

Связность на главном расслоении (P, G, M) — это такое d-мерное распределение H на P, что

(I) $H\in C^\infty$,

(II) $H_p+V_p=P_p$ для всякого $p\in P$, т. е. H_p — линейное дополнение к V_p,

(III) $dR_gH_p=H_{pg}$ для любых $p\in P$, $g\in G$.

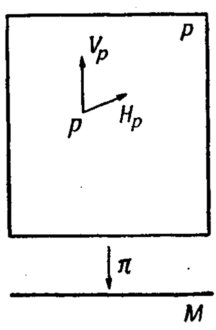

Рис. 16.

Всякое $t\in P_p$ допускает разложение $t=Vt+Ht$, где $Vt\in V_p$, $Ht\in H_p$. Если X — векторное поле, то $(VX)(p)=V(X(p))$, $(HX)(p)=H(X(p))$. Элементы пространства H_p называются *горизонтальными*.

Задача 1. Доказать, что $X \in C^\infty$ тогда и только тогда, когда VX и $HX \in C^\infty$.

Поскольку $d\pi|_{H_p}$ — взаимно однозначное отображение, то $d\pi: H_p \approx M_{\pi(p)}$ из соображений размерности. Поэтому каждому векторному полю X на M соответствует единственное векторное поле $\bar{X}$ на P, называемое *(горизонтальным) подъемом поля* X, для которого при любом $p \in P$ имеем $\bar{X}(p) \in H_p$ и $d\pi\bar{X}(p) = X(\pi(p))$. Из задачи 1 вытекает, что если $X \in C^\infty$, то $\bar{X} \in C^\infty$. Далее,

(a) $dR_g\bar{X} = \bar{X}$, $g \in G$,

(б) $\bar{X} + \bar{Y} = \overline{(X+Y)}$,

(в) $H[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X, Y]}$.

Все эти свойства очевидны.

Дадим теперь двойственную формулировку понятия связности.

1-*форма связности* H — это 1-форма φ на P со значениями в алгебре Ли, определенная следующим образом: если $p \in P$, $t \in P_p$, то $\varphi(t)$ равно такому $X \in \mathfrak{g}$, что $\bar{X}(p) = V(t)$.

Дифференциальная p-форма ω на P называется *вертикальной (горизонтальной)*, если она обращается в нуль, когда по крайней мере один из ее аргументов горизонтален (вертикален). Пусть значения ω принадлежат $\mathfrak{g}$; тогда эта форма называется *эквивариантной*, если $\omega \circ dR_g = \mathrm{Ad}\, g^{-1} \circ \omega$ для каждого $g \in G$.

Отметим, что определение вертикальной формы зависит от наличия связности, т. е. от понятия горизонтальных касательных, тогда как понятие горизонтальной формы от связности не зависит.

Лемма 1. 1-форма φ связности H обладает следующими свойствами:

(I) φ вертикальна,

(II) если $X \in \mathfrak{g}$, $\bar{X} \in \bar{\mathfrak{g}}$, то $\varphi(\bar{X}(p)) = X$ при всех $p \in P$,

(III) φ эквивариантна,

(IV) $\varphi \in C^\infty$.

Доказательство. Свойства (I) и (II) тривиальны; (III) сразу же следует из условия 3.1 (б). Пусть X — векторное C^∞-поле на P; имеем

$$VX = \sum_i f_i \overline{X}_i,$$

где $\overline{X}_i \in \bar{\mathfrak{g}}$, а f_i — некоторые функции на P. Тогда $f_i \in C^\infty$ [95, предложение 1, стр. 119], откуда $\varphi(X) = \sum_i f_i X_i \in C^\infty$ и свойство (IV) доказано.

Свойства (II)—(IV) в следующем смысле характеризуют 1-формы связности:

Теорема 1. Если φ есть 1-форма на P со значениями в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условиям (II)—(IV), то существует единственная связность H на P, 1-формой которой является φ. Поэтому такие 1-формы находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями на P.

Доказательство. Пусть $H_p = \{t \in P_p \mid \varphi(t) = 0\}$. Для $t \in P_p$ положим $Vt = \overline{\varphi(t)}\,(p)$, так что $t - Vt \in H_p$, что доказывает условие (II) определения связности. Далее, для всякого $g \in G$ имеем $\varphi(dR_g t) = \mathrm{Ad}\, g^{-1} \varphi(t) = 0$, если $t \in H_p$, откуда $dR_g t \in H_{pg}$. Поэтому $dR_g H_p \subset H_{pg}$, что доказывает условие (III). Далее, если X есть C^∞-векторное поле на P, то $VX = \overline{\varphi(X)} \in C^\infty$, так что $HX \in C^\infty$. Отсюда тривиально следует, что $H \in C^\infty$; этим окончательно установлено, что H — связность.

В силу теоремы 1, мы будем иногда называть форму φ связностью.

Задача 2. Пусть φ и ψ — формы связности на P и f есть C^∞-функция на M. Показать, что

(а) $(f \circ \pi)\varphi + (1 - f \circ \pi)\psi$ есть форма связности на P.

(б) Пусть $t \in P_p$; $t = t_1 + t_2$, $t = {'t_1} + {'t_2}$ — разложения t на горизонтальные и вертикальные компоненты относительно связностей φ и ψ; найти соответствующее разложение относительно связности $(f \circ \pi)\varphi + (1 - f \circ \pi)\psi$. [*Указание*: $\varphi('t_1) = -\psi(t_1)$.] В частности, если $f = \mathrm{const}$, то это показывает, что связности на P образуют аффинное пространство.