5.2. Параллельный перенос

Если γ — ломаная C^∞-кривая в M, то *(горизонтальным) подъемом кривой* γ называется такая C^∞-кривая $\tilde{\gamma}$ в P, что (I) $\tilde{\gamma}$ горизонтальна, т. е. $\tilde{\gamma}_*$ горизонтальна, и (II) $\pi\circ\tilde{\gamma}=\gamma$. Термин *«ломаная»* мы употребляем в следующем смысле: γ непрерывна и кусочно принадлежит C^∞.

Теорема 2. Пусть γ — ломаная C^∞-кривая в M, $\gamma:[0, 1]\to M$. Пусть $p\in\pi^{-1}(\gamma(0))$. Тогда существует единственный подъем $\tilde{\gamma}$ кривой γ, такой, что $\tilde{\gamma}(0)=p$.

Доказательство. Можно предположить, что $\gamma\in C^\infty$, поскольку подъемы кусков кривой сцепляются по существу лишь одним способом.

Распространим γ до C^∞-отображения интервала $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)=I$ в M. Тогда, в силу задачи 3.6, множество $N=\{(r, q)\in I\times P\,|\,\gamma(r)=\pi(q)\}$ является пространством некоторого главного расслоения (N, G, π', I). Отображение $\theta: N\to P$ вида $\theta(r, q)=q$ порождает связность на N, 1-формой которой служит $\tilde{\varphi}=\theta^*\varphi$ (см. задачу 3 ниже).

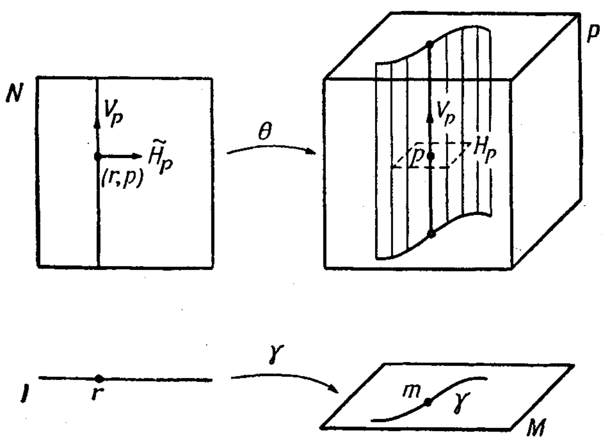

Рис. 17.

Пусть X — единственный горизонтальный подъем поля D на I в N, и пусть $\tilde{u}$ — интегральная кривая поля X, начинающаяся в $(0, p)$. Эта кривая определена на всем I, поскольку в противном случае ее можно было бы продолжить на окрестность верхнего предела интервала определения.

Определим $\tilde{\gamma}=\theta \circ \bar{u}$. Очевидно, что $\tilde{\gamma}$ — подъем кривой γ, а так как $\varphi(\tilde{\gamma}_*)=\varphi(d\theta \circ \bar{u}_*)=\tilde{\varphi}(X)=0$, то $\tilde{\gamma}$ — горизонтальная кривая.

Единственность $\tilde{\gamma}$ следует из того факта, что всякий подъем γ можно пропустить через N, разложив в композицию θ и подъема u, а последний, очевидно, единствен. Ч. Т. Д.

Следствие 1. Пусть H — связность на (P, G, M), γ — кривая в M, такая же, как в формулировке теоремы; тогда можно определить диффеоморфизм T_γ слоя $\pi^{-1}(\gamma(0))$ на слой $\pi^{-1}(\gamma(1))$, называемый *параллельным переносом из* $\gamma(0)$ *в* $\gamma(1)$ *вдоль* γ. Диффеоморфизм T_γ не зависит от параметризации γ и удовлетворяет равенству $T_\gamma \circ R_g=R_g \circ T_\gamma$ для всех $g \in G$. Далее, если γ и σ — две такие кривые с $\sigma(0)=\gamma(1)$, то $T_{\gamma\sigma}=T_\sigma \circ T_\gamma$.

Доказательство. Пусть $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, $\tilde{\gamma}$ — подъем кривой γ, $\tilde{\gamma}(0)=p$; положим $T_\gamma(p)=\tilde{\gamma}(1)$. Воспользуемся тривиальным свойством правой инвариантности для доказательства того, что $T_\gamma \in C^\infty$ и T_γ — диффеоморфизм: если p_0 — произвольный фиксированный элемент слоя $\pi^{-1}(\gamma(0))$, $p_1=T_\gamma(p_0)$, то $T_\gamma(p_0 g)=T_\gamma(p_0)g$, откуда

$$T_\gamma=p_1 \circ p_0^{-1}: \pi^{-1}(\gamma(0)) \to G \to \pi^{-1}(\gamma(1)).$$

Остальные свойства очевидны.

Заметим, что понятия параллельного переноса и связности эквивалентны, а именно, если в P задан параллельный перенос, удовлетворяющий условию правой инвариантности и некоторым условиям гладкости — точнее, касающиеся кривые порождают одинаковые инфинитезимальные преобразования, — то связность можно восстановить дифференцированием: пусть γ — соответствующая кривая в M, $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ и пусть $d\pi t=\gamma_*(0)$, где $t \in P_p$. Тогда можно определить

$Ht = T_\gamma(p)_*(0)$, рассматривая $T_\gamma(p)$ как кривую $u \to T_{\gamma_u}(p)$, где γ_u — отрезок кривой γ от $\gamma(0)$ до $\gamma(t)$.

Следующий результат дает интересную интерпретацию формы связности.

Следствие 2. Пусть γ, $\tilde{\gamma}$ — такие же, как в теореме 2, τ — произвольный подъем кривой γ (не обязательно горизонтальный). Определим $\alpha: I \to G$, выбирая в качестве $\alpha(r)$ единственное решение уравнения $\tilde{\gamma}(r) = \tau(r)\alpha(r)$

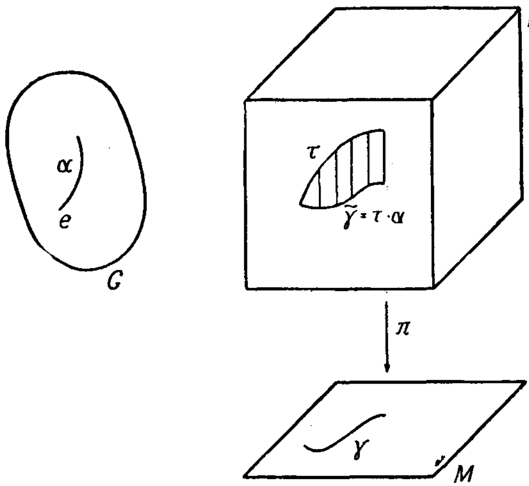

Рис. 18.

в группе G. Тогда $dR_{(\alpha(r)^{-1})}\alpha_*(r) = -\varphi(\tau_*(r))$. С помощью левого сдвига пространства мы отождествляем G_e и $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть отображение $I_r: G \to P$ определено равенством $I_r(g) = \tau(r)g$. Очевидно, что $I_r \circ L_g = \tau(r)g: G \to P$. По теореме 1.2, где отображением $P \times G \to P$ служит правое действие, имеем

$$\tilde{\gamma}_*(r) = dI_r\alpha_*(r) + dR_{\alpha(r)}\tau_*(r). \tag{1}$$

Далее

$$dI_r\alpha_*(r) = dI_r\, dL_{\alpha(r)}\, dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r)) =$$
$$= d(\tau(r)\alpha(r))(dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r))) =$$
$$= \lambda(dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r)))(\tau(r)\alpha(r))$$ (§ 3.1 и определение λX).

Поэтому $\varphi(dI_r\alpha_*(r)) = dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r))$, если вспомнить способ отождествления G_e и $\mathfrak{g}$.

С другой стороны, $\varphi(dR_{\alpha(r)}\tau_*(r)) = \mathrm{Ad}\,\alpha(r)^{-1}\varphi(\tau_*(r))$, в силу эквивариантности φ. Поскольку подъем $\tilde{\gamma}$ горизонтален, применение φ к равенству (1) дает

$$dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r)) = -\mathrm{Ad}\,\alpha(r)^{-1}\varphi(\tau_*(r)) =$$
$$= -dL_{\alpha(r)^{-1}} \circ dR_{\alpha(r)}(\varphi(\tau_*(r))),$$

откуда

$$dR_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r)) = -\varphi(\tau_*(r)).\qquad \text{Ч. Т. Д.}$$

З а д а ч а 3. Пусть $(f_B, f_G, f_M): (B, G, M) \to (B', G', M')$ — послойное отображение, причем $df_G: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ — изоморфизм «на». Показать, что любая связность на B' естественно индуцирует некоторую связность на B. В частности, это так, если (B, G', M) — расслоение над M, индуцированное некоторым $f: M \to M'$.

5.3. Форма кривизны и структурное уравнение

Всякая форма ω на P определяет форму

$$D\omega = d\omega \circ H,$$

где H — связность. Точнее, если ω есть p-форма, то $D\omega(t_1, \ldots, t_{p+1}) = d\omega(Ht_1, \ldots, Ht_{p+1})$ для $t_1, \ldots, t_{p+1} \in P_e$. Отметим, что форма $D\omega$ всегда горизонтальна.

Формой кривизны Φ связности H с 1-формой φ называется горизонтальная $\mathfrak{g}$-значная 2-форма $D\varphi$. Легко проверить, что форма Φ эквивариантна.

Нам понадобится следующая лемма для вывода структурного уравнения Картана.