Далее

$$dI_r\alpha_*(r) = dI_r\, dL_{\alpha(r)}\, dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r)) =$$
$$= d(\tau(r)\alpha(r))(dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r))) =$$
$$= \lambda(dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r)))(\tau(r)\alpha(r))$$ (§ 3.1 и определение λX).

Поэтому $\varphi(dI_r\alpha_*(r)) = dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r))$, если вспомнить способ отождествления G_e и $\mathfrak{g}$.

С другой стороны, $\varphi(dR_{\alpha(r)}\tau_*(r)) = \operatorname{Ad}\alpha(r)^{-1}\varphi(\tau_*(r))$, в силу эквивариантности φ. Поскольку подъем $\tilde{\gamma}$ горизонтален, применение φ к равенству (1) дает

$$dL_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r)) = -\operatorname{Ad}\alpha(r)^{-1}\varphi(\tau_*(r)) =$$
$$= -dL_{\alpha(r)^{-1}} \circ dR_{\alpha(r)}(\varphi(\tau_*(r))),$$

откуда

$$dR_{\alpha(r)^{-1}}(\alpha_*(r)) = -\varphi(\tau_*(r)). \qquad \text{Ч. Т. Д.}$$

Задача 3. Пусть $(f_B, f_G, f_M): (B, G, M) \to (B', G', M')$ — послойное отображение, причем $df_G: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ — изоморфизм «на». Показать, что любая связность на B' естественно индуцирует некоторую связность на B. В частности, это так, если (B, G', M) — расслоение над M, индуцированное некоторым $f: M \to M'$.

5.3. Форма кривизны и структурное уравнение

Всякая форма ω на P определяет форму

$$D\omega = d\omega \circ H,$$

где H — связность. Точнее, если ω есть p-форма, то $D\omega(t_1, \ldots, t_{p+1}) = d\omega(Ht_1, \ldots, Ht_{p+1})$ для $t_1, \ldots, t_{p+1} \in P_e$. Отметим, что форма $D\omega$ всегда горизонтальна.

Формой кривизны Φ связности H с 1-формой φ называется горизонтальная $\mathfrak{g}$-значная 2-форма $D\varphi$. Легко проверить, что форма Φ эквивариантна.

Нам понадобится следующая лемма для вывода структурного уравнения Картана.

Лемма 2. Если $X \in \mathfrak{g}$ и V — горизонтальное векторное поле на P, то поле $[\overline{X}, V]$ горизонтально.

Доказательство. Теорему 3.1 нельзя применить непосредственно, поскольку горизонтальные векторные поля не образуют конечномерного векторного пространства. Однако существует обходный путь. Пусть V_i — правоинвариантное горизонтальное векторное поле, т. е. фактически горизонтальный подъем некоторого векторного поля на M. Тогда, полагая $\mathscr{L} = \{V_i\}$ в теореме 3.1, получим $[\overline{X}, V_i] = 0$. Далее, локально можно записать $V = \sum_i f_i V_i$, где V_i — горизонтальные и правоинвариантные поля, а f_i являются C^∞-функциями на P. Но тогда, в силу задачи 1.14, $[\overline{X}, V] = \sum_i (\overline{X} f_i) V_i$, и потому поле $[\overline{X}, V]$ горизонтально.

Задача 4. Применив оператор $L_{\overline{X}} = i(\overline{X})d + di(\overline{X})$ к форме связности φ, показать, что $\varphi([\overline{X}, V]) = 0$ для горизонтального векторного поля V, получив тем самым другое доказательство леммы. [*Указание*: однопараметрическая группа преобразований, ассоциированная с $\overline{X}$, — это группа e^{tX}, действующая справа. Поэтому поле $L_{\overline{X}}(\varphi)$ вертикально.]

Теорема 3. (*Структурное уравнение.*) Пусть φ есть 1-форма связности на P, Φ — ее форма кривизны; тогда

$$d\varphi = -\frac{1}{2}[\varphi, \varphi] + \Phi.$$

Отметим, что если G — группа матриц и $\mathfrak{g}$ отождествляется с пространством линейных преобразований, то $-\frac{1}{2}[\varphi, \varphi] = -\varphi^2$.

Доказательство. Покажем, что выписанные выше 2-формы, примененные к векторным полям X и Y на P, дают одинаковый результат. Поскольку эти формы линейны, то можно ограничиться случаями, когда каждое из X, Y принадлежит $\overline{\mathfrak{g}}$ или горизонтально.

(I) $X, Y \in \bar{\mathfrak{g}}$, тогда существуют $X', Y' \in \mathfrak{g}$, такие, что $\bar{X}' = X$, $\bar{Y}' = Y$ и, значит, $\varphi(X) = X'$, $\varphi(Y) = Y'$. Далее, по теореме 4.2

$$\begin{aligned} d\varphi(X, Y) &= X\varphi(Y) - Y\varphi(X) - \varphi([X, Y]) = \\ &= X(Y') - Y(X') - [X', Y'] = \\ &= -\frac{1}{2}[\varphi, \varphi](X, Y) = \\ &= -\frac{1}{2}[\varphi, \varphi](X, Y) + \Phi(X, Y), \end{aligned}$$

что и требовалось, поскольку Φ горизонтально. Заметим, что $X(Y') = 0$, поскольку Y' выступает как постоянная $\mathfrak{g}$-значная функция на P; аналогично $Y(X') = 0$.

(II) $X \in \bar{\mathfrak{g}}$, поле Y горизонтально. Пусть $X' \in \mathfrak{g}$ такое же, как в (I):

$$d\varphi(X, Y) = X\varphi(Y) - Y\varphi(X) - \varphi([X, Y]) = 0,$$

так как $\varphi(Y) = 0$, $\varphi(X)$ постоянно, а $[X, Y]$, в силу леммы, горизонтально. С другой стороны, Φ горизонтально, так что $\Phi(X, Y) = 0$, поскольку X вертикально, и $[\varphi, \varphi](X, Y) = 0$, ибо Y горизонтально.

(III) Оба поля X, Y горизонтальны. Имеем $\varphi(X) = 0$, $\varphi(Y) = 0$ и

$$\Phi(X, Y) = d\varphi(HX, HY) = d\varphi(X, Y),$$

что совпадает со структурным уравнением для данного случая. Ч. Т. Д.

Замечание. Сужение структурного уравнения на вертикальные векторы по существу дает уравнения Маурера — Картана. Другая интерпретация: в форме $d\varphi$ имеются только горизонтальная и вертикальная компоненты, но нет *смешанной компоненты.*

Теорема 4. *(Тождество Бьянки.)* Если Φ — форма кривизны связности на главном расслоении P, то

$$D\Phi = 0.$$

Доказательство. Из структурного уравнения имеем

$$D\Phi = D\,d\varphi - \frac{1}{2} D\,[\varphi, \varphi].$$

Далее, $Dd\varphi(X_1, X_2, X_3) = dd\varphi(HX_1, HX_2, HX_3) = 0$, так как $d^2 = 0$. Но и $D[\varphi, \varphi] = 0$, поскольку $[\varphi, \varphi]$ — вертикальная 2-форма, и потому аннулируется, когда один из ее аргументов равен горизонтальному вектору. Поэтому $D\Phi = 0$.

Теорема 5. Пусть H — связность на P, Φ — ее форма кривизны. Тогда $\Phi = 0$ в том и только в том случае, если H — инволютивное распределение, что, в силу теоремы 1.6, означает существование локальных горизонтальных сечений в P. В частности, если M односвязно, то, в силу обычных соображений монодромии, расслоение P должно быть тривиальным.

Связность, для которой $\Phi = 0$, называется *плоской.*

Доказательство. Если X, Y — горизонтальные векторные поля на P, то

$$\Phi(X, Y) = d\varphi(X, Y) = X\varphi(Y) - Y\varphi(X) - \varphi([X, Y]) = \\ = -\varphi([X, Y]);$$

поэтому инволютивность H, равносильная горизонтальности $[X, Y]$, равносильна условию $\Phi(X, Y) = -\varphi([X, Y]) = 0$, т. е. равенству $\Phi = 0$, как и утверждалось.

Задача 5. Пусть H — замкнутая подгруппа группы Ли G, порождающая главное расслоение $(G, H, G/H)$. Рассмотрим связность φ на этом расслоении. Показать, что $\varphi \circ dR_h = dR_h \circ \varphi$. Предположим теперь, что φ инвариантно относительно dL_g при любом $g \in G$. Показать, что

(а) φ определяет проекцию $\bar{\varphi}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ соответствующих алгебр Ли;

(б) если $\mathfrak{m} = \ker \bar{\varphi}$, то $[\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}$;

(в) обратно, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ (прямая сумма) и $[\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}$, то проекция $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$ порождает инвариантную связность в вышеуказанном смысле. Следовательно, имеется взаимно однозначное соответствие между инвариантными связностями на $(G, H, G/H)$ и *редуктивными* дополнениями $\mathfrak{m}$ к $\mathfrak{h}$. Подгруппа H, допускающая такое инвариантное дополнение $\mathfrak{m}$, называется *редуктивной в* G (этот термин связан с тем, что сужение присоединенного представления группы G на подгруппу H приводится к сумме присоединенного представления H и представления H на пространстве $\mathfrak{m}$ посредством Ad_G, по крайней мере когда H связно);

(г) показать, что форму кривизны связности φ можно рассматривать заданной на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$; вывести соответствующую формулу.

5.4. Существование связностей. Связности на ассоциированных расслоениях

Существование связностей. Имеется много C^∞-связностей. В гл. 7 будет показано, что на $B(M)$ имеются римановы связности. Здесь же мы установим, что всякое главное расслоение (P, G, M), где M паракомпактно, обладает связностью.

Пусть $\{U_i\}$ — покрытие M, причем $\pi^{-1}(U_i)$ тривиально, f_i есть C^∞-разложение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$, φ_i — плоская связность на $\pi^{-1}(U_i)$, и пусть $\varphi = \sum (f_i \circ \pi)\varphi_i$. Тогда φ — (не обязательно плоская) форма связности на P.

Задача 6. Проверить, что φ — форма связности.

Замечание. Если (P, G, π, M) — комплексное аналитическое главное расслоение над комплексным многообразием M, то, обладая, конечно, C^∞-связностями, оно, вообще говоря, не допускает комплексной аналитической связности. Необходимое условие в одном частном случае приведено в работе [3].

Все же вещественные аналитические многообразия допускают аналитические связности, однако доказательство этого факта значительно труднее (см. замечание, следующее за теоремой 7.2).