ную связность в вышеуказанном смысле. Следовательно, имеется взаимно однозначное соответствие между инвариантными связностями на $(G, H, G/H)$ и *редуктивными* дополнениями $\mathfrak{m}$ к $\mathfrak{h}$. Подгруппа H, допускающая такое инвариантное дополнение $\mathfrak{m}$, называется *редуктивной в* G (этот термин связан с тем, что сужение присоединенного представления группы G на подгруппу H приводится к сумме присоединенного представления H и представления H на пространстве $\mathfrak{m}$ посредством Ad_G, по крайней мере когда H связно);

(г) показать, что форму кривизны связности φ можно рассматривать заданной на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$; вывести соответствующую формулу.

5.4. Существование связностей. Связности на ассоциированных расслоениях

Существование связностей. Имеется много C^∞-связностей. В гл. 7 будет показано, что на $B(M)$ имеются римановы связности. Здесь же мы установим, что всякое главное расслоение (P, G, M), где M паракомпактно, обладает связностью.

Пусть $\{U_i\}$ — покрытие M, причем $\pi^{-1}(U_i)$ тривиально, f_i есть C^∞-разложение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$, φ_i — плоская связность на $\pi^{-1}(U_i)$, и пусть $\varphi = \sum (f_i \circ \pi)\varphi_i$. Тогда φ — (не обязательно плоская) форма связности на P.

Задача 6. Проверить, что φ — форма связности.

Замечание. Если (P, G, π, M) — комплексное аналитическое главное расслоение над комплексным многообразием M, то, обладая, конечно, C^∞-связностями, оно, вообще говоря, не допускает комплексной аналитической связности. Необходимое условие в одном частном случае приведено в работе [3].

Все же вещественные аналитические многообразия допускают аналитические связности, однако доказательство этого факта значительно труднее (см. замечание, следующее за теоремой 7.2).

Ассоциированные расслоения. Пусть (P, G, M) — главное расслоение со связностью H, и пусть (B, G, F, M) — ассоциированное расслоение со слоем F (см. § 3.3). Тогда H в некотором смысле индуцирует «связность» на B, точнее, такое распределение H' на B, которое в каждой точке дополнительно к вертикальному касательному пространству. Далее, существует параллельный перенос слоев расслоения B, порождаемый, как и прежде, горизонтальными подъемами кривых.

Параллельный перенос. Пусть γ — ломаная C^∞-кривая в M, $b \in \pi'^{-1}(\gamma(0))$. Определим подъем $\bar{\gamma}$ кривой γ в B, горизонтальный в следующем смысле. Пусть $f \in F$ и $p \in P$ таковы, что $\pi(p) = \gamma(0)$ и $pf = b$; здесь p — отображение, определенное в § 3.3. По теореме 2, существует горизонтальный подъем $\tilde{\gamma}$ кривой γ в P, такой, что $\tilde{\gamma}(0) = p$. Определим теперь $\bar{\gamma}$, положив $\bar{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(t)f$. Тогда *параллельный перенос* $\bar{T}_\gamma$ вдоль γ из $\pi'^{-1}(\gamma(0))$ в $\pi'^{-1}(\gamma(1))$ определяется так же, как в P. Отсюда $\bar{T}_\gamma = T_\gamma(p) \circ p^{-1}$, так что параллельный перенос является диффеоморфизмом.

Распределение H'. Пусть $b \in B$, $p \in P$ таковы, что $\pi'(b) = \pi(p)$. Мы можем рассматривать P_p как подпространство пространства $(P \times F)_{(p, f)}$, где $f \in F$ таково, что $pf = b$. Пусть $\lambda : P \times F \to B$ — естественное отображение (§ 3.3), и пусть $H'_b = d\lambda(H_p)$. Это определение не зависит от p, в силу правой инвариантности H; в то же время ясно, что определенный выше подъем горизонтален относительно H' — нужно только вспомнить определение отображения

$$p : F \to \pi'^{-1}(\pi(p)).$$

Задача 7. Пусть φ, ψ — формы связностей H, K; H', K' — соответствующие распределения на B. Показать, что если $s, t \in B_b$, $H's = s$, $K't = t$ и $d\pi'(s) = d\pi'(t)$, то $rs + (1 - r)t$ является распределением на B, отвечающим связности $r\varphi + (1 - r)\psi$.

Задача 8. Определить все связности на $T(R)$, касательном расслоении многообразия R.

Задача 9. Показать, что на ассоциированных расслоениях существуют горизонтальные распределения, не являющиеся связностями. [*Указание*: взять $T(R) \approx R^2$ и определить распределение с наклоном e^y.]

5.5. Структурные уравнения для горизонтальных форм

Докажем вначале основную лемму.

Пусть G — группа Ли диффеоморфизмов многообразия M, $G \times M \to M$, и φ — некоторое представление группы G невырожденными линейными преобразованиями векторного пространства V. Тогда существует ассоциированное представление $\tilde{\varphi}$ алгебры $\mathfrak{g}$ линейными преобразованиями пространства V, которое можно определить следующим образом: если $v \in V$, $X \in \mathfrak{g}$, то $\tilde{\varphi}(X)v = X(e)v$. Это определение имеет смысл, поскольку v можно рассматривать как векторнозначную функцию на G, а именно $v(g) = \varphi(g)v$, и потому v преобразуется в вектор под действием дифференцирования $X(e)$ (см. § 1.4, 2.2 и 2.6).

Лемма 3. Пусть $X \in \mathfrak{g}$, ω есть V-значная p-форма и $Y_1, \ldots, Y_p$ — инвариантные векторные поля на M.

(I) Если ω удовлетворяет условию $\omega \circ dg = \varphi(g)\omega$ при всех $g \in G$, то

$$(\tilde{\varphi}X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p) = (\lambda X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p),$$

где λX — векторное поле на M, определенное в § 3.1.

(II) Если ω удовлетворяет условию $\omega \circ dg = \varphi(g^{-1})\omega$ при всех $g \in G$, то

$$-(\tilde{\varphi}X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p) = (\lambda X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p).$$

Доказательство. Докажем (II). Доказательство (I) аналогично. Если $f \in M$, то $\omega(Y_1, \ldots, Y_p) \circ f$ есть V-значная функция на G и в действительности

$$\omega(Y_1, \ldots, Y_p) \circ f(g) = \omega(Y_1(gf), \ldots, Y_p(gf)) =$$
$$= \omega(dgY_1(f), \ldots, dgY_p(f)) = \varphi(g^{-1})\omega(Y_1(f), \ldots, Y_p(f)) =$$
$$= \omega(Y_1(f), \ldots, Y_p(f))\psi(g),$$