Задача 9. Показать, что на ассоциированных расслоениях существуют горизонтальные распределения, не являющиеся связностями. [*Указание*: взять $T(R) \approx R^2$ и определить распределение с наклоном e^y.]

5.5. Структурные уравнения для горизонтальных форм

Докажем вначале основную лемму.

Пусть G — группа Ли диффеоморфизмов многообразия M, $G \times M \to M$, и φ — некоторое представление группы G невырожденными линейными преобразованиями векторного пространства V. Тогда существует ассоциированное представление $\tilde{\varphi}$ алгебры $\mathfrak{g}$ линейными преобразованиями пространства V, которое можно определить следующим образом: если $v \in V$, $X \in \mathfrak{g}$, то $\tilde{\varphi}(X)v = X(e)v$. Это определение имеет смысл, поскольку v можно рассматривать как векторнозначную функцию на G, а именно $v(g) = \varphi(g)v$, и потому v преобразуется в вектор под действием дифференцирования $X(e)$ (см. § 1.4, 2.2 и 2.6).

Лемма 3. Пусть $X \in \mathfrak{g}$, ω есть V-значная p-форма и $Y_1, \ldots, Y_p$ — инвариантные векторные поля на M.

(I) Если ω удовлетворяет условию $\omega \circ dg = \varphi(g)\omega$ при всех $g \in G$, то

$$(\tilde{\varphi}X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p) = (\lambda X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p),$$

где λX — векторное поле на M, определенное в § 3.1.

(II) Если ω удовлетворяет условию $\omega \circ dg = \varphi(g^{-1})\omega$ при всех $g \in G$, то

$$-(\tilde{\varphi}X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p) = (\lambda X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p).$$

Доказательство. Докажем (II). Доказательство (I) аналогично. Если $f \in M$, то $\omega(Y_1, \ldots, Y_p) \circ f$ есть V-значная функция на G и в действительности

$$\omega(Y_1, \ldots, Y_p) \circ f(g) = \omega(Y_1(gf), \ldots, Y_p(gf)) =$$
$$= \omega(dgY_1(f), \ldots, dgY_p(f)) = \varphi(g^{-1})\omega(Y_1(f), \ldots, Y_p(f)) =$$
$$= \omega(Y_1(f), \ldots, Y_p(f))\psi(g),$$

где $\psi(g)=g^{-1}$, поскольку Y_i инвариантно, а ω эквивариантно относительно представления φ. Следовательно,

$$\begin{aligned}(\lambda X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p)(f) &= (\lambda X)(f)(\omega(Y_1, \ldots, Y_p)) = \\ &= dfX(e)(\omega(Y_1, \ldots, Y_p)) \qquad (3.1)\\ &= X(e)(\omega(Y_1, \ldots, Y_p)\circ f) = \\ &= X(e)(\omega(Y_1(f), \ldots, Y_p(f))\circ\psi) = \\ &= d\psi X(e)(\omega(Y_1(f), \ldots, Y_p(f))) = \\ &= -X(e)(\omega(Y_1(f), \ldots, Y_p(f))) \\ &\qquad\qquad (\text{лемма } 2.1)\\ &= -\tilde{\varphi}(X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p)(f),\end{aligned}$$

последний шаг следует из определения $\tilde{\varphi}$. Это и дает требуемый результат.

Применим эту лемму к главному расслоению (P, G, M), где G действует на P справа.

Теорема 6 Пусть φ есть 1-форма связности на P, и ω есть $\mathfrak{g}$-значная горизонтальная эквивариантная p-форма на P. Тогда ω удовлетворяет структурному уравнению

$$d\omega = -[\varphi, \omega] + D\omega.$$

Доказательство. Докажем это, применив обе части равенства к $p+1$ векторным полям $Y_1, \ldots, Y_{p+1}$, принадлежащим некоторому семейству, локально порождающему касательное пространство к P. В это семейство войдут прежде всего векторные поля $\{\lambda X\}$, $X \in \mathfrak{g}$, порождающие вертикальное касательное пространство. Остальные векторные поля можно подбирать различными способами. Рассмотрим несколько случаев.

(I) *Ни одно Y_i не вертикально.* Тогда можно предположить, что все Y_i горизонтальны и, значит, $[\varphi, \omega](Y_1, \ldots, Y_{p+1})=0$, так как φ вертикально. При этом $HY_i=Y_i$, откуда $D\omega(Y_1, \ldots, Y_{p+1})=d\omega(Y_1, \ldots, Y_{p+1})$, и теорема в данном случае доказана.

(II) *Одно Y_i вертикально.* Предположим, что $Y_{p+1}=\lambda X$. Можно выбрать $Y_1, \ldots, Y_p$ так, чтобы они были правоинвариантными, и так, чтобы $[Y_i, \lambda X]=0$. Чтобы осуществить это в окрестности точки $f \in P$, выделим координатную систему в точке f, порожденную локальной структурой произведения на P. Теперь достаточно взять поля частных производных по переменным, соответствующим M, поскольку эти поля, очевидно, правоинвариантны и надлежащим образом коммутируют с λX, ибо λX зависит только от остальных координат.

Далее, $H(\lambda X)=0$ влечет $D\omega(Y_1, \ldots, Y_{p+1})=0$. Кроме того, из теоремы 4.2 следует, что

$$\begin{aligned}
&d\omega(Y_1, \ldots, Y_{p+1})= \\
&=\sum_i (-1)^{i-1} Y_i \omega(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \ldots, Y_{p+1})+ \\
&+\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_1, \ldots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \ldots, Y_{p+1})= \\
&=(-1)^p Y_{p+1}\omega(Y_1, \ldots, Y_p), \quad \text{ибо } \omega \text{ горизонтально,} \\
&=(-1)^p (\lambda X)\omega(Y_1, \ldots, Y_p)=(-1)^{p+1} \operatorname{ad} X\omega(Y_1, \ldots, Y_p),
\end{aligned}$$

в силу леммы при $\varphi=\mathrm{Ad}$ и § 2.6, так как ω эквивариантно,

$$\begin{aligned}
&=(-1)^{p+1}[X, \omega(Y_1, \ldots, Y_p)]= \\
&=(-1)^{p+1}[\varphi(\lambda X), \omega(Y_1, \ldots, Y_p)]= \\
&=-[\varphi, \omega](Y_1, \ldots, Y_p, Y_{p+1}),
\end{aligned}$$

в силу § 4,9, а также горизонтальности ω. Это то, что требовалось доказать.

(III) *Два или более Y_i вертикальны.* Из того, что ω горизонтально, ясно, что все обращается в нуль. Ч. Т. Д.

Следствие. Если Φ — форма кривизны, ассоциированная с φ, то

$$d\Phi=-[\varphi, \Phi].$$

Доказательство. Φ горизонтальна и эквивариантна, поэтому результат вытекает из теоремы 6 и тождества Бьянки.

Лемма 3 не раз пригодится нам в дальнейшем.