5.6. Голономия [2, 5, 38, 51, 62, 70]

Материал этого параграфа излагается в виде серии задач.

Пусть (P, G, π, M) — главное расслоение со связностью φ. Пусть $p \in P$, определим $K_p \subset G$, полагая $K_p = \{g \in G \mid pg$ — параллельный перенос элемента $p\}$.

Задача 10. K_p — подгруппа в G, так называемая *подгруппа голономии* связности φ в точке p.

Задача 11. Если $p' \in P$ — параллельный перенос элемента p, то $K_p = K_{p'}$.

Задача 12. Если $p' = pg$, $g \in G$, то $K_{p'} = K_{pg} = g^{-1} K_p g$. (Следовательно, *группа голономии* связности φ определена с точностью до изоморфизма.)

Задача 13. Пусть $K_{p0} = \{g \in K_p \mid pg$ — параллельный перенос элемента p вдоль гомотопически тривиальной кривой$\}$. Показать, что K_{p0} — линейно связная нормальная подгруппа группы K_p и, следовательно, линейно связная подгруппа группы G; K_{p0} называется *ограничённой группой голономии* связности φ в точке p. При этих условиях, в силу теоремы Ямабе [96], группа K_{p0} — подгруппа Ли в G.

Задача 14. Имеется естественный гомоморфизм фундаментальной группы многообразия M с базисной точкой $\pi(p)$ на факторгруппу K_p/K_{p0}.

Задача 15. Если M односвязно, то $K_{p0} = K_p$. Например, если $M = R$, то $K_p = \{1\}$, так как всякая связность интегрируема.

Известно, что K_{p0} является компонентой связности группы K_p [51], откуда K_p — группа Ли. Пусть $P'_p = \{p' \in P \mid p'$ — параллельный перенос элемента $p\}$.

Задача 16. Пусть $(P'_p, K_p, M, \pi|'_{P_p})$ — главное расслоение, и включение $i_p : P'_p \to P$ приводит группу G

к подгруппе K_p. Кроме того, $i_p{}^*(\varphi)$ — форма связности на P'_p.

Задача 17. Если G можно привести к подгруппе K с помощью такого послойного отображения $i: P' \to P$, что $i^*(\varphi)$ является связностью на (P', K, M), то $K_p \subset K$ при любом $p \in P'$.

Задача 18. Если Φ — форма кривизны связности φ, то для каждого $p \in P$ множество $\Phi(P_p, P_p)$ содержится в алгебре Ли $\mathfrak{k}_p$ группы K_p. (Амброз и Зингер [2] доказали больше, а именно, что если $V = \{\Phi(P_p, P_p) \mid p$ — параллельный перенос фиксированного $p_0 \in P\}$, то алгебра Ли, порожденная множеством V, есть $\mathfrak{k}_{p_0}$. Позднее было показано [56], что V линейно порождает $\mathfrak{k}_{p_0}$.

Задача 19. Всякая дискретная подгруппа группы положительных вещественных чисел реализуется как группа голономии некоторой связности на расслоении базисов $B(S^1)$ окружности, и никакая другая подгруппа не может быть группой голономии.

Задача 20. Если φ — связность на (S^{2d+1}, S^1, CP^d), то группа голономии в каждой точке есть S^1.

Задача 21. Если φ — связность на (S^{4d+3}, S^3, QP^d), то группой голономии служит либо S^3, либо S^1.

В этих задачах требуется предварительно показать, что любые две гомотопные ломаные C^∞-петли можно соединить гомотопией ломаных C^∞-петель и что всякий гомотопический класс петель содержит ломаную C^∞-петлю.