Аффинные связности

На расслоении базисов по связности определяется дополнительная структура, включающая форму кручения, базисные векторные поля, преобразования кручения и кривизны, а также геодезические. Выводится дополнительное структурное уравнение, рассматриваются формы разности, в частности в их связи с кручением и конфигурацией геодезических. Определяются экспоненциальное отображение, полнота, нормальные координаты. Глава завершается рассмотрением ковариантного дифференцирования и классических определений вышеуказанных понятий [22, 32, 33, 51, 80].

6.1. Определения

Пусть M — многообразие, $B(M)$ — его расслоение базисов. Связность на $B(M)$ называется *аффинной связностью*. Поскольку всякую связность на подрасслоении расслоения $B(M)$ можно продолжить до аффинной связности с помощью правого действия группы $GL(d, R)$, то такая связность также называется аффинной связностью.

Параллельный перенос в расслоении $B(M)$, заданный аффинной связностью, порождает *параллельный перенос в касательном расслоении*, или *параллельный перенос касательных вдоль кривых*. Так как касательное расслоение $T(M)$ ассоциировано с $B(M)$, то это свойство можно было бы вывести из § 5.4, однако в данном случае имеется достаточно простое явное определение.

Если γ — кривая в M и $t \in M_m$, $m=\gamma(0)$, то параллельный перенос касательной t вдоль γ в точку $n=\gamma(u)$ происходит следующим образом: пусть $\bar{\gamma}$ — единственный горизонтальный подъем кривой γ, проходящий через $b \in B(M)$, где $\pi(b)=m$. Тогда если $\bar{\gamma}(s)=(\gamma(s),$

$e_1(s), \ldots, e_d(s))$ и $t=\sum_i a_i e_i(0)$, то $\sum a_i e_i(u)$ является, по определению, параллельным переносом t. Легко проверить, в силу инвариантности связности относительно

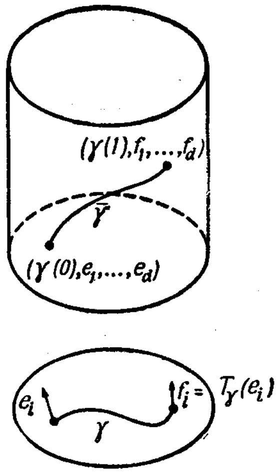

Рис. 19.

правого действия, что это преобразование не зависит от выбора b над m.

6.1.1. Формы смещения

На $B(M)$ всегда определены некоторые горизонтальные 1-формы, не зависящие ни от какой связности на этом расслоении. Определим *1-формы смещения* ω_i следующим образом. Пусть $t \in B(M)_b$, где $b=(m, e_1, \ldots, e_d)$. Тогда

$$d\pi t = \sum \omega_i(t) e_i.$$

Иначе, эти ω_i можно рассматривать как одну R^d-значную 1-форму ω вида

$$\omega(t) = (\omega_1(t), \ldots, \omega_d(t)).$$

Лемма 1. Форма смещения удовлетворяет следующим условиям:

(I) $\omega \in C^\infty$,

(II) ω горизонтальна,

(III) ω *эквивариантна*, т. е. для каждого $g \in Gl(d, R)$

$$R_g^*(\omega) = \omega \circ dR_g = g^{-1} \circ \omega,$$

причем в правой части g считается действующим слева в R^d.

Доказательство (II) очевидно. Для доказательства (III) возьмем

$$t \in B(M)_b, \quad b = (m, e_1, \ldots, e_d), \quad d\pi t = \sum a_i e_i.$$

Имеем

$$dR_g t \in B(M)_{bg}, \quad bg = \left(m, \sum_i g_{i1} e_i, \ldots, \sum_i g_{id} e_i\right)$$

Далее,

$$d\pi t = \sum_{i, j, k} (g_{ij}^{-1} a_j)(g_{ki} e_k),$$

так что

$$\omega_i(dR_g t) = \sum g_{ij}^{-1} a_j.$$

Отсюда $\omega(dR_g t) = g^{-1}\omega(t)$, как и утверждалось.

Доказательство свойства (I) прямое. Пусть y_i, y_{jk} — координаты произведения на координатной окрестности в $B(M)$ (§ 3.2). Нам нужно показать, что $\omega(D_{y_{kj}})$ и $\omega(D_{y_i})$ принадлежат C^∞. В силу (II), $\omega(D_{y_{jk}}) = 0$, поэтому надо рассмотреть лишь $\omega(D_{y_i})$. Но

$$d\pi D_{y_i}(b) = \sum_j y_{ji}^{-1}(b) e_j \quad \text{(задача 3.4)},$$

где $b = (m, e_1, \ldots, e_d)$. Следовательно,

$$\omega(D_{y_i}) = (y_{1i}^{-1}, \ldots, y_{di}^{-1}) \in C^\infty. \quad \text{Ч. Т. Д.}$$

6.1.2. Фундаментальные и базисные векторные поля

Векторное поле $\overline{X}$ на $B(M)$ называется *фундаментальным*, если $\overline{X} \in \lambda(\mathfrak{gl}(d, R))$, т. е. если существует $X \in \mathfrak{gl}(d, R)$, такое, что $\overline{X} = \lambda X$ (§ 3.1). В частности, фундаментальное векторное поле, соответствующее $X_{ij} \in \mathfrak{gl}(d, R)$, где X_{ij} — матрица с 1 на (i, j)-м месте и 0 на остальных местах, обозначается через E_{ij}.

В следующей лемме рассматриваются свойства фундаментального векторного поля.

Лемма 2. Если $\overline{X}$ — фундаментальное векторное поле на $B(M)$, то

(I) $\overline{X} \in C^{\infty}$,

(II) $\overline{X}$ вертикально,

(III) если $\overline{X} = \lambda X$, то

$$dR_g \overline{X} = \lambda (\mathrm{Ad}\, g^{-1} X) \qquad [3.1\,(б)]$$

для $g \in Gl(d, R)$.

Пусть H — некоторая связность на $B(M)$, $x \in R^d$, $b \in B(M)$. Тогда существует единственный горизонтальный касательный вектор $E(x)(b)$ в точке b, такой, что $\omega(E(x)(b)) = x$, так как $d\pi$ является изоморфизмом на H_b. Векторное поле на $B(M)$, значение которого в точке b есть $E(x)(b)$, называется *базисным векторным полем* и обозначается через $E(x)$.

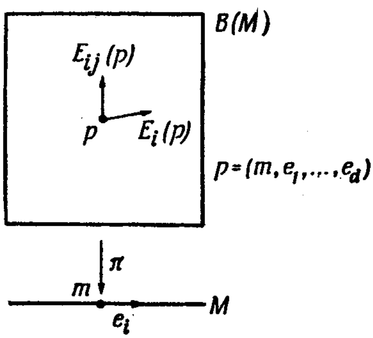

Рис. 20.

В частности, если $\delta_i = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{di}) \in R^d$, то имеются базисные векторные поля $E_i = E(\delta_i)$, порождающие базис горизонтального касательного пространства в каждой точке пространства $B(M)$. Эти $E(x)$ не являются горизонтальными подъемами каких-нибудь векторных полей на пространстве M, поскольку они не правоинвариантны ввиду утверждения (III) следующей леммы:

Лемма 3. Пусть $E(x)$ — базисное векторное поле на $B(M)$. Тогда

(I) $E(x) \in C^{\infty}$,

(II) $E(x)$ горизонтально (по определению),

(III) $dR_g E(x) = E(g^{-1}x)$

для $g \in Gl(d, R)$; здесь g считается действующим слева на R^d, как в лемме 1.

Доказательство. Утверждения (I) и (III) следуют из леммы 1 и определения $\omega(E(x)) = x$.

Заметим, что векторные поля E_i, E_{jk} определяют *параллелизацию* расслоения $B(M)$, т. е. для каждого $b \in B(M)$ векторы $E_i(b)$, $E_{jk}(b)$ образуют базис в $B(M)_b$. Далее, эти поля двойственны к 1-формам ω_i, φ_{jk}, где φ_{jk} есть 1-форма, являющаяся (j, k)-элементом матричной 1-формы связности $\varphi(t)$. Заметим, что E_{jk} и ω_i не зависят от связности, но присущи самому расслоению базисов. Напротив, E_i и φ_{jk} действительно зависят от связности, и фактически сама связность определяется заданием либо $\{E_i\}$, либо $\{\varphi_{jk}\}$. Для φ_{jk} это видно из теоремы 5.1. Далее, если E_i — это d линейно независимых не обращающихся в 0 векторных полей на $B(M)$, удовлетворяющих равенствам $\omega(E_i) = \delta_i$, то распределение H, заданное условием:

$$«H_b \text{ натянуто на } \{E_i(b)\}»,$$

очевидно, является связностью на $B(M)$ с базисными векторными полями E_i.

6.1.3. Другое определение формы смещения

Иногда каждое $b \in B(M)$, $b = (m, e_1, \ldots, e_d)$, удобно рассматривать как изоморфизм пространства R^d на M_m, полагая

$$b(x) = \sum x_i e_i.$$

Это соответствует тому, что $T(M)$, касательное расслоение к M, ассоциировано с $B(M)$ относительно левого действия группы $Gl(d, R)$ на R^d, так что $b(gx) = bg(x)$ для $g \in G$ (см. § 3.3).

Лемма 4. Пусть $b \in B(M)$, $t \in B(M)_b$, тогда

$$\omega(t) = b^{-1}(d\pi t),$$

и эту формулу можно использовать для определения ω. Далее, если $x \in R^d$, то

$$E(x)(b) = \left(d\pi|_{H_b}\right)^{-1}(bx).$$

Доказательства этих утверждений очевидны, а преимущество использования их в качестве определений заключается в том, что они дают более непосредственное описание этих понятий, а также действий над ними. Например, свойство (III) леммы 1 можно доказать следующим образом. Отображение $bg : R^d \xrightarrow{g} R^d \xrightarrow{b} M_m$ обладает обратным

$$(bg)^{-1} = g^{-1}b^{-1} : M_m \xrightarrow{b^{-1}} R^d \xrightarrow{g^{-1}} R^d,$$

и поэтому

$$\omega(dR_g t) = (bg)^{-1}(d\pi t) = g^{-1}\left(b^{-1}(d\pi t)\right) = g^{-1}\omega(t).$$

6.1.4. Кручение

Формой кручения Ω аффинной связности H на $B(M)$ называется R^d-значная 2-форма

$$\Omega = D\omega = d\omega \circ H.$$

(Ср. с формой кривизны.) Легко проверить, что Ω — горизонтальная C^∞-форма, являющаяся эквивариантной, т. е.

$$\Omega \circ dR_g = g^{-1} \circ \Omega.$$

Свяжем теперь формы кривизны и кручения с базисными векторными полями данной связности.

Лемма 5. Пусть $x, y \in R^d$. Тогда

$$[E(x), E(y)] = -\lambda\Phi(E(x), E(y)) - E(\Omega(E(x), E(y))),$$

т. е. кривизна и кручение оказываются вертикальной и горизонтальной составляющими скобки двух базисных векторных полей.

Доказательство. Покажем, что ω и φ, примененные к обеим частям равенства, дают одну и ту же функцию; этого достаточно, поскольку ω и φ — параллелизующие формы, т. е. двойственны к множеству параллелизующих векторных полей. Вычисление правой части нетрудно, поскольку λX вертикально, а $E(z)$ горизонтально:

$$\varphi\ (\text{правая часть}) = -\varphi(\lambda\Phi(E(x),\ E(y))) = -\Phi(E(x),\ E(y)),$$

$$\omega\ (\text{правая часть}) = -\omega(E(\Omega(E(x),\ E(y)))) = -\Omega(E(x),\ E(y)).$$

Чтобы применить φ и ω к левой части, воспользуемся инвариантными формулами для внешних производных $d\varphi$, $d\omega$ (см. § 4.6):

$$\begin{aligned}-\varphi\ (\text{левая часть}) &= -\varphi([E(x),\ E(y)]) = \\ &= E(x)\varphi(E(y)) - E(y)\varphi(E(x)) - \varphi([E(x),\ E(y)]) = \\ &= d\varphi(E(x),\ E(y)) = d\varphi(HE(x),\ HE(y)) = \\ &= D\varphi(E(x),\ E(y)) = \Phi(E(x),\ E(y)).\end{aligned}$$

Аналогично

$$-\omega\ (\text{левая часть}) = d\omega(E(x),\ E(y)) = \Omega(E(x),\ E(y)).$$

Мы воспользовались тем, что $\varphi(E(y)) = \varphi(E(x)) = 0 = \mathrm{const}$ и $\omega(E(x)) = x = \mathrm{const}$, $\omega(E(y)) = y = \mathrm{const}$, откуда их производные по направлениям $E(y)$ и $E(x)$ равны 0. Ч. Т. Д.

Теорема 1. Пусть φ — форма связности на $B(M)$. Тогда формы кривизны и кручения связности φ равны нулю в том и только в том случае, если M удовлетворяет следующему условию:

в каждой точке $m \in M$ существует такая координатная система $(x_1, \ldots, x_d)$ с областью определения U, что образ сечения $\chi: U \to B(M)$, определенного выражением

$$\chi(n) = (n,\ D_{x_1}(n),\ \ldots,\ D_{x_d}(n)),$$

горизонтален.

Доказательство. Заметим сначала, что

$$H(d\chi D_{x_i}(n)) = E_i(\chi(n)).$$

Поэтому если образ $\chi(U)$ горизонтален, то на нем, а, следовательно, по эквивариантности и везде выполняется равенство $[E_i, E_j]=0$, и поэтому, в силу леммы, кривизна и кручение равны нулю.

Обратно, если эти формы обращаются в нуль, то, по теореме 5.5, существует горизонтальное многообразие N, и $E_1, \ldots, E_d$ — векторные поля с тривиальными скобками. Снося их на M, найдем с помощью теоремы 1.5, что на M имеется координатная система $(x_1, \ldots, x_d)$, для которой

$$D_{x_i} = d\pi E_i|_N.$$

Это и есть требуемая координатная система.

Задача 1. Равенство кручения нулю инвариантно относительно комбинаций связностей. Используя доказательство существования связности из гл. 5, показать, что всякое паракомпактное многообразие обладает аффинной связностью с нулевым кручением.

6.1.5. Преобразования кривизны и кручения

Формы кривизны и кручения порождают тензоры на M, которые можно рассматривать в общем контексте тензорного исчисления на M, однако мы предпочитаем прямой подход в терминах линейных преобразований на касательных пространствах.

Точке $m \in M$ и паре s, $t \in M_m$ поставим в соответствие линейное преобразование $R_{st}: M_m \to M_m$, называемое *преобразованием кривизны*: пусть $b \in B(M)$, $\pi(b)=m$; $\bar{t}$, $\bar{s} \in B(M)_b$, $d\pi(\bar{t})=t$, $d\pi(\bar{s})=s$. В обозначениях п. 6.1.3 определим

$$R_{st}(u) = -b\Phi(\bar{s}, \bar{t})b^{-1}(u)$$

для любого $u \in M_m$.

В силу горизонтальности и эквивариантности Φ, легко проверить, что наше определение не зависит от допущенного произвола в выборе b, $\bar{s}$ и $\bar{t}$.

Преобразование R_{st} можно также определить в терминах матриц. Пусть $b=(m, e_1, \ldots, e_d)$, а $\bar{s}$, $\bar{t}$ — такие же, как и выше. Тогда R_{st} — линейное преобразование M_m, матрица которого относительно базиса $e_1, \ldots, e_d$ есть $-\Phi(\bar{s}, \bar{t})$. Например, $R_{st}e_j = -\sum_i \Phi_{ij}(\bar{s}, \bar{t})\, e_i$.

Пусть X, Y, Z — векторные поля на M; обозначим через $R_{XY}Z$ векторное поле, удовлетворяющее равенству

$$R_{XY}Z(m) = R_{X(m)Y(m)}Z(m).$$

Каждой точке $m \in M$ и паре s, $t \in M_m$ сопоставим касательную $T_{st} \in M_m$, называемую *переносом кручения*. Пусть $b \in B(M)$, $\bar{s}$, $\bar{t} \in B(M)_b$ — такие же, как в определении преобразования кривизны. Положим

$$T_{st} = -b\Omega(\bar{s}, \bar{t}).$$

Доказательство корректности определения T_{st} аналогично соответствующему доказательству для R_{st}. Так же, как и выше, по векторным полям X и Y строится векторное поле T_{XY}.

6.1.6. Геодезические

Пусть γ есть C^∞-кривая в M. *Векторное поле вдоль* γ — это сечение над γ в $T(M)$, касательном расслоении многообразия M. Например, γ_* — векторное поле вдоль γ. Говорят, что векторное поле X вдоль γ является *параллельным векторным полем вдоль* γ, если при любых u, v вектор $X(u)$ оказывается параллельным переносом вектора $X(v)$ вдоль γ из $\gamma(u)$ в $\gamma(v)$. В терминах связности на ассоциированном расслоении $T(M)$ (см. § 5.4) это означает, что X определяет горизонтальную кривую в $T(M)$.

Назовем C^∞-кривую γ *геодезической*, если ее касательное векторное поле γ_* параллельно вдоль γ.

Заметим, что геодезическая является параметризованной кривой, а не просто точечным множеством. При этом единственной репараметризацией геодезической, снова определяющей геодезическую, является линейная замена параметра.

Теорема 2. Пусть γ есть C^∞-кривая в M, $\bar{\gamma}$ — ее горизонтальный подъем через $b \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ в $B(M)$; тогда γ является геодезической в том и только в том случае, если существует $c \in R^d$, такое, что $\bar{\gamma}$ — интегральная кривая поля $E(c)$, и в том и только в том случае, если $\omega(\bar{\gamma}_*)$ постоянно, т. е. когда в выражении

$$\bar{\gamma}_*(u) = \sum f_i E_i(\bar{\gamma}(u))$$

коэффициенты f_i постоянны.

Доказательство очевидно. С помощью теоремы о существовании и единственности интегральных кривых векторных полей получаем

Следствие. Для произвольных $m \in M$, $t \in M_m$ существует единственная геодезическая γ, для которой $\gamma(0) = m$ и $\gamma_*(0) = t$.

6.1.7. Геометрическая интерпретация преобразований R_{st} и T_{st}

В этом пункте мы свяжем R_{st} и T_{st} с параллельным переносом вокруг инфинитезимального параллелограмма со сторонами s и t.

Рассмотрим семейство «параллелограммов» таких же, как в теореме 1.4, но только интегральные кривые векторных полей заменим на геодезические. Параллельный перенос касательных s и t вдоль ломаных геодезических, начинающихся в точке m, порождает векторные поля S и T. Сторонами нашего «параллелограмма» поочередно служат геодезические длины u с касательными векторными полями S, T, $-S$ и $-T$. Если конечную точку «параллелограмма» обозначить через $\sigma(u)$, то σ оказывается C^∞-кривой, начинающейся в точке m. Так как «параллелограммы», вообще говоря, не замкнуты, то σ не обязательно является постоянной кривой. Пусть $A(u)$ — линейное преобразование пространства M_m, заданное параллельным переносом сначала вокруг «параллелограмма», а затем обратно вдоль кривой σ.

Теорема 3. Касательные первого порядка кривых σ и A равны нулю. Касательная второго порядка (см.

задачу 1.20) кривой σ есть $2T_{st}$, а $A''(0)=2R_{st}$; здесь A рассматривается как кривая в векторном пространстве $\mathfrak{gl}(M_m)$.

Другими словами, смещения, заданные обходом «параллелограмма» и параллельным переносом вокруг такого «параллелограмма» в первом порядке обращаются в нуль, тогда как второй порядок этих смещений определяет соответственно кручение и кривизну.

Доказательство. Горизонтальные подъемы в $B(M)$ наших «параллелограммов», начинающиеся в точке b, являются интегральными кривыми пары базисных векторных полей X и Y, так же как в теореме 1.4. Поэтому, в силу той же теоремы, кривая γ, состоящая из концов этих подъемов, расположенная над σ, имеет касательную второго порядка $2[X, Y](b)$, тогда как ее касательная первого порядка равна 0. Так как, по лемме 5, горизонтальная компонента вектора $2[X, Y](b)$ является подъемом вектора $2T_{st}$, то первое утверждение доказано.

Аналогично, вертикальная составляющая вектора $2[X, Y](b)$ измеряет второй порядок отклонения γ от параллельного переноса, откуда вторая производная $A''(0)$ равна соответствующему преобразованию пространства M_m, т. е. $2R_{st}$, согласно лемме 5.

Развертка кривых многообразия M в M_m. С помощью так называемой развертки кривым в M сопоставляются кривые в плоском аффинном пространстве M_m. Для этого требуется, чтобы касательные векторы к каждой кривой находились в одинаковом отношении к параллельным переносам выбранного базиса M_m.

Пусть γ — ломаная C^∞-кривая, начинающаяся в m, $b=(m, e_1, \ldots, e_d)$ — базис в m. Пусть σ — горизонтальный подъем γ через b в $B(M)$. Тогда $\gamma_*=\sigma f$, где $f=\sigma^{-1}\gamma_*$ — кривая в R^d. Теперь $g(t)=\int\limits_0^t f$ определяет кривую в R^d, которая называется *разверткой кривой* γ *в* M_m. Кривая bg не зависит от выбора базиса в m.

Эту процедуру можно обратить: для всякой ломаной C^∞-кривой τ в M_m, начинающейся в 0, имеется соответствующая кривая γ в M, начинающаяся в точке m, разверткой которой служит τ. Для доказательства построим сначала горизонтальный подъем σ кривой γ; известно,

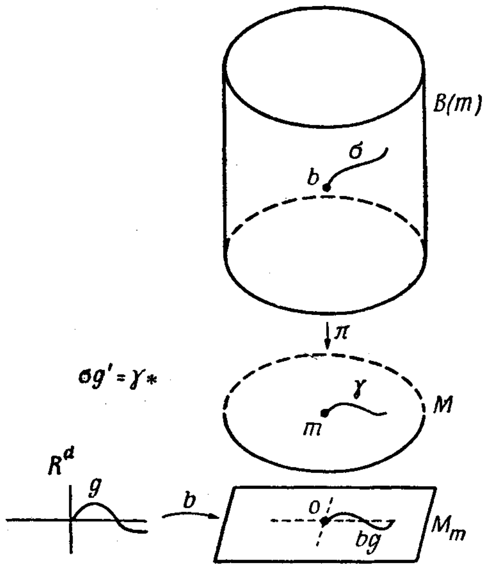

Рис. 21.

что $\sigma_*(t) = E(b^{-1}\tau'(t))(\sigma(t))$, поэтому существование γ вытекает из следующей леммы.

Лемма 6. Пусть E — линейное отображение из R^d в линейное пространство C^∞-векторных полей на многообразии N. Тогда для любой ломаной C^∞-кривой f в R^d и $n \in N$ найдется единственная ломаная C^∞-кривая σ в N, такая, что

$$\sigma(0) = n \text{ и } \sigma_*(t) = E(f(t))(\sigma(t)).$$

Доказательство. Определим векторное поле X на $U \times N$, где U — окрестность нуля в R, положив $X(t, n') = D_1(t) + E(f(t))(n')$. Тогда интегральная кривая поля X, начинающаяся в $(0, n)$, является графиком требуемой кривой σ.

Отметим, что геодезические развертываются в прямые линии.

Задача 2. Пусть s, $t \in M_m$ и τ — замкнутая ломаная C^∞-кривая в плоскости s, t, такая, что $\tau(0)=0$. Для всякого $v \in R$ определим кривую $v\tau$ в M_m, полагая $(v\tau)(u)=v(\tau(u))$. Пусть $\tau(u)=p(u)s+q(u)t$, $0 \leqslant u \leqslant 1$,

$$A=\int_0^1 p(u)\,q'(u)\,du$$

— площадь, ограниченная кривой τ относительно s, t. Пусть h — такое отображение $[0, 1]\times R$ в M, что $h(\cdot, v)$ развертывается в $v\tau$. Пусть $\gamma(v)=h(1, v)$ и $S(v)$ — линейное преобразование M_m, определенное параллельным переносом вокруг замкнутой кривой, состоящей из $h(\cdot, v)$ и куска кривой γ^{-1}. Доказать следующее обобщение теоремы 3:

$\gamma_*(0)=0$, а касательная второго порядка есть $2AT_{st}$; $S'(0)=0$ и $S''(0)=2AR_{st}$.

6.2. Структурные уравнения аффинной связности

Пусть H — аффинная связность на $B(M)$. Пусть φ, ω, Φ, Ω — ее 1-форма связности, форма смещения, форма кривизны и форма кручения соответственно.

Теорема 4. Имеют место равенства

$$d\omega=-\varphi\omega+\Omega,$$

$$d\varphi=-\frac{1}{2}[\varphi, \varphi]+\Phi.$$

Эти равенства называются первым и вторым структурными уравнениями связности. (См. § 4.9, где определены формы $\varphi\omega$, $[\varphi, \varphi]$.)

Доказательство. Второе структурное уравнение — это просто структурное уравнение для связности