поля X, начинающаяся в $(0, n)$, является графиком требуемой кривой σ.

Отметим, что геодезические развертываются в прямые линии.

Задача 2. Пусть $s, t \in M_m$ и τ — замкнутая ломаная C^∞-кривая в плоскости s, t, такая, что $\tau(0)=0$. Для всякого $v \in R$ определим кривую $v\tau$ в M_m, полагая $(v\tau)(u)=v(\tau(u))$. Пусть $\tau(u)=p(u)s+q(u)t$, $0 \leqslant u \leqslant 1$,

$$A=\int_0^1 p(u)q'(u)\,du$$

— площадь, ограниченная кривой τ относительно s, t. Пусть h — такое отображение $[0, 1]\times R$ в M, что $h(\cdot, v)$ развертывается в $v\tau$. Пусть $\gamma(v)=h(1, v)$ и $S(v)$ — линейное преобразование M_m, определенное параллельным переносом вокруг замкнутой кривой, состоящей из $h(\cdot, v)$ и куска кривой γ^{-1}. Доказать следующее обобщение теоремы 3:

$\gamma_*(0)=0$, а касательная второго порядка есть $2AT_{st}$;
$S'(0)=0$ и $S''(0)=2AR_{st}$.

6.2. Структурные уравнения аффинной связности

Пусть H — аффинная связность на $B(M)$. Пусть φ, ω, Φ, Ω — ее 1-форма связности, форма смещения, форма кривизны и форма кручения соответственно.

Теорема 4. Имеют место равенства

$$d\omega=-\varphi\omega+\Omega,$$
$$d\varphi=-\frac{1}{2}[\varphi, \varphi]+\Phi.$$

Эти равенства называются первым и вторым структурными уравнениями связности. (См. § 4.9, где определены формы $\varphi\omega$, $[\varphi, \varphi]$.)

Доказательство. Второе структурное уравнение — это просто структурное уравнение для связности на главном расслоении (см. теорему 5.3). Для вывода первого структурного уравнения докажем следующий более общий результат.

Теорема 5. Пусть θ есть R^d-значная эквивариантная горизонтальная p-форма на $B(M)$, тогда

$$d\theta = -\varphi\theta + D\theta.$$

Доказательство. Оно почти совпадает с доказательством теоремы 5.6. Мы вычисляем обе части равенства на векторных полях $Y_1, \ldots, Y_{p+1}$, взятых из совокупности векторных полей, локально порождающих касательное пространство к $B(M)$. Рассмотрим те же случаи, что и прежде.

(I) *Никакое Y_i не вертикально.* Можно предположить, что все Y_i горизонтальны. Но тогда член $\varphi\theta$ обращается в 0 и остается вспомнить определение $D\theta$.

(II) *Одно Y_i вертикально.* Предположим, что $Y_{p+1} = \lambda X$, $X \in \mathfrak{gl}(d, R)$. Как и раньше, выберем правоинвариантные горизонтальные Y_i так, что $[Y_i, \lambda X] = 0$, $i = 1, \ldots, p$. Тогда, по теореме 4.2,

$$d\theta(Y_1, \ldots, Y_{p+1}) = (-1)^p (\lambda X)\theta(Y_1, \ldots, Y_p).$$

Применяя теперь лемму 5.3 и представляя φ как матричную операцию на R^d, получим

$$(-1)^p \lambda X \theta(Y_1, \ldots, Y_p) = (-1)^{p+1} X\theta(Y_1, \ldots, Y_p).$$

С другой стороны, $D\theta(Y_1, \ldots, Y_p, \lambda X) = 0$, так как $D\theta$ горизонтально, поэтому правая часть дает

$$-\varphi\theta(Y_1, \ldots, Y_p, \lambda X) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \varphi(Y_i)\theta(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \ldots, Y_{p+1}) =$$
$$= -(-1)^p \varphi(\lambda X)\theta(Y_1, \ldots, Y_p) = (-1)^{p+1} X\theta(Y_1, \ldots, Y_p).$$

Таким образом, обе части равенства приводят к одинаковым результатам.

(III) *Два из Y_i вертикальны.* В этом случае все обращается в нуль, и равенство выполняется автоматически. Ч. Т. Д.

Теорема 6. Пусть θ — эквивариантная горизонтальная p-форма со значениями либо в $\mathfrak{gl}(d, R)$, либо в R^d. Пусть $\square$ обозначает операцию скобки или матричного умножения в $\mathfrak{gl}(d, R)$ или R^d соответственно. Тогда

$$D^2\theta = \Phi \square \theta.$$

Доказательство. θ удовлетворяет структурному уравнению

$$d\theta = -\varphi \square \theta + D\theta,$$

по теореме 5.6 или теореме 5. Действие D на обе части уравнения приводит к равенству

$$d^2\theta \circ H = -d(\varphi \square \theta) \circ H + D^2\theta.$$

Но $d^2 = 0$ и

$$d(\varphi \square \theta) \circ H = d\varphi \circ H \square \theta - \varphi \circ H \square D\theta = \Phi \square \theta,$$

что и требовалось доказать.

Комбинируя полученный результат с тождеством Бьянки (теорема 5.4), получим *аффинные тождества Бьянки*: $D\Phi = 0$ и $D\Omega = \Phi\omega$.

6.2.1. Двойственная формулировка структурных уравнений

Первое структурное уравнение имеет двойственное, выраженное в терминах скобки фундаментального и базисного полей.

Теорема 7. Пусть $X \in \mathfrak{gl}(d, R)$, $x \in R^d$. Тогда

$$[\lambda X, E(x)] = E(Xx),$$

где Xx — действие матрицы X на вектор x.

Доказательство. Можно доказать, что $[\lambda X, E(x)]$ горизонтально либо с помощью второго структурного уравнения, либо заметив, что это в точности утверждение леммы 5.2. Таким образом, надо лишь проверить, что

$$\omega([\lambda X, E(x)]) = Xx.$$

Но из первого структурного уравнения имеем

$$\omega([\lambda X, E(x)]) = +\lambda X\omega(E(x)) - \\ - E(x)\omega(\lambda X) - d\omega(\lambda X, E(x)) = \\ = \varphi\omega(\lambda X, E(x)) = \\ = \varphi(\lambda X)\omega(E(x)) = Xx. \quad \text{Ч. Т. Д.}$$

Для векторных полей E_i, E_{jk} теорема 7 дает формулу

$$[E_{jk}, E_i] = \delta_{ik}E_j.$$

Заметим, что эта формула непосредственно вытекает также из теоремы 3.1 и поэтому в свою очередь может быть использована для доказательства первого структурного уравнения.

Задача 3. Дать другое доказательство теоремы 7, применив формулу $L_{\lambda X} = i(\lambda X)d + di(\lambda X)$ к форме смещения ω и вычислив получающуюся форму на векторном поле $E(x)$. (Ср. с задачей 5.4.)

6.2.2. Формы разности

Пусть φ, ψ — две 1-формы связности на $B(M)$. Определим *форму разности* τ, положив $\tau = \psi - \varphi$.

Лемма 7. Форма разности τ обладает следующими свойствами:

(I) $\tau \in C^\infty$,

(II) τ горизонтальна,

(III) τ эквивариантна.

Обратно, если φ — форма связности и τ есть $\mathfrak{gl}(d, R)$-значная 1-форма, удовлетворяющая (I)—(III), то $\varphi + \tau$ также является 1-формой некоторой связности.

Эти результаты очевидны.

Форма разности τ порождает линейное преобразование $T_s: M_m \to M_m$ при любом $s \in M_m$, а именно, если $\pi(b) = m$, то

$$T_s t = b\tau(\bar{s})b^{-1}t,$$

где $\bar{s} \in B(M)_b$ таково, что $d\pi\bar{s} = s$.

Обратно, если дана функция T, относящая паре $m \in M$, $s \in M_m$ линейное преобразование $T_s : M_m \to M_m$, линейное по s и «дифференцируемое» по m и s [как функция на $T(M)$ со значениями в ассоциированном с $B(M)$ расслоении линейных преобразований касательных пространств к M со слоем $\mathfrak{gl}(d, R)$ и действием присоединенного представления группы $Gl(d, R)$], то можно определить $\mathfrak{gl}(d, R)$-значную 1-форму, удовлетворяющую (I)—(III), положив

$$\tau(\bar{s}) = b^{-1} T_{d\pi\bar{s}} b$$

для произвольного $\bar{s} \in B(M)_b$. Кроме того, $T_s t = b\tau(\bar{s}) b^{-1} t$, так что существует взаимно однозначное соответствие между формами разности и некоторыми функциями, которые мы назовем *полями линейных преобразований*.

Теорема 8. Пусть φ — связность на $B(M)$. Тогда существует форма разности τ, для которой $\psi = \varphi + \tau$ оказывается 1-формой связности с нулевой 2-формой кручения (см. задачу 1).

Далее, если τ' также обладает этим свойством, то $\tau\omega = \tau'\omega$ (в обозначениях § 4.9).

Доказательство. Рассмотрим форму τ, предполагая, что она существует. Выписав первые структурные уравнения для φ и ψ, получим

$$d\omega = -\varphi\omega + \Omega, \quad d\omega = -\psi\omega,$$

так как ψ имеет нулевое кручение. Поэтому $(\varphi - \psi)\omega = \Omega$ и, значит, τ должно удовлетворять уравнению

$$-\tau\omega = \Omega.$$

Последняя часть теоремы уже доказана. Чтобы показать, что такое τ существует, положим при $b \in B(M)$, $s \in B(M)_b$, $x \in R^d$

$$-\tau(s)(x) = \frac{1}{2}\Omega(s, E(x)(b)).$$

Нетрудно проверить, что τ принадлежит C^∞ и является эквивариантной горизонтальной 1-формой. Далее, для $b \in B(M)$ и $s, t \in B(M)_b$

$$-\tau\omega(s, t) = -\tau(s)\omega(t) + \tau(t)\omega(s) =$$
$$= \frac{1}{2}\Omega(s, E(\omega(t))(b)) - \frac{1}{2}\Omega(t, E(\omega(s))(b)) =$$
$$= \frac{1}{2}\Omega(s, t) - \frac{1}{2}\Omega(t, s) = \Omega(s, t), \qquad \text{ч. т. д.}$$

Отметим, что поле линейных преобразований T, ассоциированное с τ, есть $T_s(t) = \frac{1}{2} T_{st}$, где T_{st} — перенос кручения, соответствующий s, $t \in M_m$ (п. 6.1.5).

Прежде чем идти дальше, приведем удобную формулировку параллельного переноса.

Лемма 8. Пусть ρ — произвольная C^∞-кривая в M, $t \in M_{\rho(0)}$, $b \in B(M)$, $\pi(b) = \rho(0)$. Пусть φ — форма связности на $B(M)$ и β есть φ-горизонтальный подъем кривой ρ через b. Тогда φ-параллельным переносом t вдоль ρ в $\rho(u)$ служит $\beta(u)b^{-1}t$.

Доказательство очевидно, ввиду того что каждое $c \in B(M)$ порождает изоморфизм R^d на $M_{\pi(c)}$.

Лемма 9 является полезной характеристикой геодезических.

Лемма 9. Пусть γ — кривая в M, $\bar\gamma$ — (не обязательно горизонтальный) подъем γ в $B(M)$. Тогда γ является геодезической в том и только в том случае, если

$$(\bar\gamma_* + \varphi(\bar\gamma_*))\,\omega(\bar\gamma_*) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть P — главное расслоение, индуцированное расслоением $B(M)$ посредством кривой γ над ее областью определения U. Таким образом,

$$P = \{(u, b) \mid u \in U,\ \pi b = \gamma(u)\}.$$

Тогда отображение $\alpha : P \to B(M)$, $\alpha(u, b) = b$ принадлежит C^∞, поэтому формы смещения и связности можно снести на P : $\omega' = \alpha^*\omega$, $\varphi' = \alpha^*\varphi$; $\Omega' = \alpha^*\Omega = 0$, так как горизонтальное пространство в P одномерно.

Отображение $\sigma: U \to P$ вида $\sigma(u) = (u, \bar{\gamma}(u))$ является C^∞-кривой в P; σ_* продолжается до правоинвариантного векторного C^∞-поля X на P. Если же вместо $\bar{\gamma}$ взять горизонтальный подъем β кривой γ, то получится векторное C^∞-поле Y на P, причем $\varphi'(Y) = 0$. Кроме того, X и Y оба проектируются в $D = d/du$ на U, откуда $[X, Y]$ вертикально и $\omega'(X) = \omega'(Y)$.

По теореме 2, γ является геодезической тогда и только тогда, когда $\omega(\beta_*)$ постоянно, т. е. $\beta_* \omega(\beta_*) = 0$, и это равенство после применения α переходит в

$$Y\omega'(Y) = 0.$$

Далее, из первого структурного уравнения имеем

$$d\omega'(X, Y) = X\omega'(Y) - Y\omega'(X) = -\varphi'(X)\omega'(Y),$$

откуда, так как $\omega'(X) = \omega'(Y)$,

$$X\omega'(X) + \varphi'(X)\omega'(X) = Y\omega'(Y).$$

Следовательно, γ — геодезическая тогда и только тогда, когда обращается в нуль левая часть этого равенства, что вдоль σ приводит к

$$\frac{d}{du}\omega'(\sigma_*) + \varphi'(\sigma_*)\omega'(\sigma_*) = 0.$$

Подставляя значения ω', φ', получим

$$\frac{d}{du}\omega(\bar{\gamma}_*) + \varphi(\bar{\gamma}_*)\omega(\bar{\gamma}_*) = 0.$$

Итак, теорема доказана в одну сторону. Для доказательства обратного утверждения надо лишь обратить импликацию

$$X\omega'(X) + \varphi'(X)\omega'(X) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{du}\omega'(\sigma_*) + \varphi'(\sigma_*)\omega'(\sigma_*) = 0,$$

что возможно, в силу правоинвариантности X.

Следующая теорема не относится к римановой геометрии, но имеет интересные следствия в теории связностей.

Теорема 9. Пусть φ и ψ — две формы связности на $B(M)$, τ — форма их разности. Геодезические связностей φ и ψ совпадают в том и только в том случае, когда для всех $b \in B(M)$, $s \in B(M)_b$

$$\tau(s)\,\omega(s)=0.$$

Доказательство. Если две связности имеют одни и те же геодезические, то для данного $s \in B(M)_b$ найдется геодезическая γ, горизонтальный подъем которой $\bar{\gamma}$ удовлетворяет равенству $\bar{\gamma}_*(0)=s$. (Если s вертикально, то γ постоянно.)

Тогда, по лемме 9,

$$\bar{\gamma}_*(0)\,\omega(\bar{\gamma}_*)=-\varphi(s)\,\omega(s)=-\psi(s)\,\omega(s),$$

что и требовалось.

Обратно, если $\tau(s)\,\omega(s)=0$ для всех s и $\bar{\gamma}$ — подъем φ-геодезической γ, то

$$\bar{\gamma}_*\omega(\bar{\gamma}_*)=-\varphi(\bar{\gamma}_*)\,\omega(\bar{\gamma}_*)=-\psi(\bar{\gamma}_*)\,\omega(\bar{\gamma}_*),$$

так как $\tau(\bar{\gamma}_*)\,\omega(\bar{\gamma}_*)=0$, откуда γ является ψ-геодезической.

Нижеследующее утверждение является обобщением теоремы 8, а сравнение доказательств показывает, что обе встречающиеся здесь связности имеют одни и те же геодезические.

Следствие. Пусть φ — некоторая связность и θ — эквивариантная горизонтальная R^d-значная 2-форма на $B(M)$. Тогда существует единственная связность ψ, имеющая θ своей формой кручения и те же геодезические, что и φ. В частности, если геодезические и формы кручения двух связностей совпадают, то совпадают и сами связности.

Доказательство. Доказательство единственности заключается в выводе формулы для $\tau=\varphi-\psi$, а доказательство существования — в тривиальной проверке горизонтальности и эквивариантности получающейся формы τ.

Предположим, следовательно, что φ и ψ имеют одинаковые геодезические и что первыми структурными уравнениями служат

$$d\omega = -\varphi\omega + \Omega,$$
$$d\omega = -\psi\omega + \theta.$$

Вычитая, получаем

$$\tau\omega = (\varphi - \psi)\omega = \Omega - \theta = \eta,$$

т. е. при $s, t \in B(M)_b$

$$\tau(s)\omega(t) - \tau(t)\omega(s) = \eta(s, t).$$

Посредством поляризации условие совпадения геодезических переходит в равенство $\tau(s)\omega(t) + \tau(t)\omega(s) = 0$. Сложение двух последних равенств дает формулу для τ, поскольку $\omega(t)$ произвольно:

$$\tau(s)\omega(t) = \frac{1}{2}\eta(s, t).$$

Задача 4. Показать, что если геодезические двух связностей совпадают, то они совпадают с геодезическими любой их комбинации в смысле задачи 5.2.

Задача 5. *Связности на параллелизуемых многообразиях.* Пусть ρ есть R^d-значная 1-форма на M, дающая параллелизацию M. Определим три связности, ассоциированные с ρ.

Прямая связность — это связность, при которой векторные поля $\rho^{-1}(x)$ с фиксированным $x \in R^d$ параллельны вдоль каждой кривой. *Связность без кручения* — это связность с геодезическими прямой связности, но с нулевым кручением. *Противоположная связность* — это связность с формой $\varphi + 2\tau$, где φ — форма прямой связности, а $\varphi + \tau$ — форма связности без кручения.

Проверить следующие свойства этих связностей:

(а) Параллелизация ρ естественно приводит к некоторому сечению в $B(M)$ над M. Это сечение горизонтально относительно прямой связности, и с его помощью структурные уравнения сносятся в одно уравнение $d\rho = P$ на M, где P — снесенная форма кручения.

(б) Две параллелизации связаны C^∞-отображением многообразия в пространство $Gl(d, R)$, причем соответствующие прямые связности совпадают в том и только в том случае, если это отображение постоянно (M связно).

(в) Геодезические всех трех связностей совпадают и состоят из интегральных кривых векторных полей $\rho^{-1}(x)$.

(г) Если ρ постоянно на векторных полях X, Y, Z, то кручение и кривизна этих связностей задаются таблицей:

прямая связность	$T_{XY} = [X, Y]$, $R_{XY} = 0$,
связность без кручения	$T_{XY} = 0$, $R_{XY}Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$,
противоположная связность	$T_{XY} = -[X, Y]$, $R_{XY} = 0$.

(д) Для противоположной связности $R_{XY}=0$ в том и только в том случае, если ρ постоянно на $[X, Y]$.

Если ρ постоянно на всех таких $[X, Y]$, то хорошо известно, что M можно снабдить структурой локальной группы Ли, при которой эти постоянные векторные поля станут левоинвариантными. В общем случае проблема локальной эквивалентности прямых связностей изучается в более широком контексте G-структур. Ясное изложение этого материала имеется в книге С. Штернберга (Shlomo Sternberg, Lectures on differential geometry, New Jersey, 1964).

Задача 6. *Связности на группах Ли.* Группа Ли параллелизуема с помощью лево-, а также правоинвариантных векторных полей. Назовем соответствующие прямые связности *левой* и *правой связностью.* Показать, что они противоположны друг другу, так что обе связности без кручения совпадают. Первое структурное уравнение левой связности сносится, как в задаче 5(а), в уравнение Маурера — Картана (задачи 4.20, 4.23). Выразить P в терминах структурных констант c_{ij}^k.

Все три связности совпадают тогда и только тогда, когда группа абелева, поэтому произведения евклидова пространства и тора имеют плоскую аффинную связность без кручения.