6.3. Экспоненциальные отображения

Экспоненциальное отображение в точке $m \in M$ — это некоторое отображение окрестности U нуля пространства M_m в многообразие M

$$\exp_m : U \to M.$$

Для тех $t \in M_m$, для которых $\exp_m(t)$ определено, оно задается следующим образом. Пусть геодезическая γ в M (однозначно) определена условиями $\gamma(0) = m$, $\gamma_*(0) = t$. Тогда

$$\exp_m(t) = \gamma(1).$$

Заметим, что $\exp_m(ut) = \gamma(u)$ при вещественном u, если только $\gamma(u)$ существует. Область определения

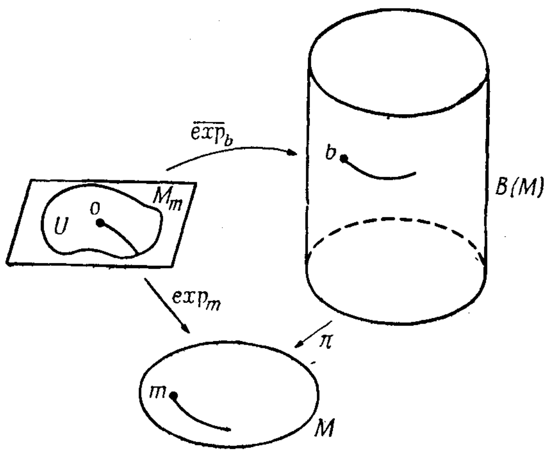

Рис. 22.

$\exp_m$ — это открытое подмножество в M_m, звездное относительно $0 \in M_m$ в том смысле, что вместе со всякой своей точкой t оно содержит и весь отрезок прямой от 0 до t.

Кроме этого экспоненциального отображения рассмотрим также некоторый подъем в $B(M)$. Для $b \in B(M)$ с $\pi(b) = m$ определим $\overline{\exp}_b(t) = \bar{\gamma}(1)$, где $\bar{\gamma}$ — единственный горизонтальный подъем кривой γ через b.

Так как γ — геодезическая, то $\bar{\gamma}$ — интегральная кривая поля $E(x)$, где $bx = \gamma_*(0) = t$ (теорема 2).

Мы покажем, что $\overline{\exp_b} \in C^\infty$, так что $\exp_m = \pi \circ \overline{\exp_b} \in C^\infty$. Отсюда немедленно следует, что $\exp_m$ осуществляет диффеоморфизм своей области определения на окрестность точки m, так как образом $d\exp_m$ служит все M_m: действительно, если $e_1, \ldots, e_d$ — базис в M_m, а $u_1, \ldots, u_d$ — сопряженный базис, то $d\exp_m D_{u_i}(0) = e_i$, причем размерности M_m и M одинаковы.

Теорема 10. $\overline{\exp_b} \in C^\infty$.

Доказательство. Проведем его в несколько более общем виде. Рассмотрим *аффинное расслоение* $A(M)$ над M, т. е. расслоение, пространство которого состоит из пар (b, t), $b \in B(M)$, $t \in M_{\pi(b)}$, а проекцией служит $(b, t) \to \pi(b)$. Это многообразие с очевидной дифференцируемой структурой. Определим отображение

$$F: B(M) \times A(M) \to T(B(M))$$

равенством

$$F(b, c, t) = E(c^{-1}t)(b).$$

Каждое $(c, t) \in A(M)$ дает векторное поле $E(c^{-1}t)$ на $B(M)$. Очевидно, F есть C^∞-отображение. В силу теорем из приложения о дифференциальных уравнениях, существует C^∞-отображение G окрестности $\{0\} \times B(M) \times A(M)$ в $B(M)$, заданное формулой $G(u, b, c, t) = \gamma(u)$, где γ — интегральная кривая поля $E(c^{-1}t)$ с $\gamma(0) = b$. Тогда

$$\overline{\exp_b} t = G(1, b, b, t).$$

Следствие. Отображение $\operatorname{Exp}: T(M) \to M$ вида

$$\operatorname{Exp}(m, t) = \exp_m t$$

определено на некоторой окрестности тривиального сечения расслоения $T(M)$ и принадлежит C^∞.

Доказательство. Пусть $m \in M$, выберем C^∞-сечение χ над окрестностью m в $B(M)$. Тогда на этой окрестности отображение

$$J:(m,\ t)\to(1,\ \chi(m),\ \chi(m),\ t)$$

в $\{u\}\times B(M)\times A(M)$ принадлежит C^∞ и

$$\mathrm{Exp}=\pi\circ G\circ J.$$

Задача 7. (а) Если P — главное расслоение над многообразием M, M наделено аффинной связностью, $m\in M$, то отображение $\exp_m$ можно пропустить через P.

(б) Всякое расслоение над R^d тривиально.

6.3.1. Полнота

Аффинная связность называется *полной*, если все геодезические можно неограниченно продолжать, т. е. если каждое экспоненциальное отображение определено на всем касательном пространстве. Это эквивалентно тому, что локальная группа преобразований многообразия $B(M)$, порожденная базисным векторным полем $E(x)$, продолжается до глобальной однопараметрической группы преобразований многообразия $B(M)$. Мы увидим в гл. 8, что полнота в смысле римановой связности эквивалентна полноте в смысле римановой метрики.

6.3.2. Нормальные координаты

Координатное отображение $\varphi: U\to R^d$, $U\subset M$, называется *нормальным координатным отображением* в точке $m=\varphi^{-1}(0)$, если прообразы лучей, проходящих через $0\in R^d$, являются геодезическими (луч — это прямая линия вида $u\to ux$, $x\in R^d$).

Выбрав базис $b\in B(M)$ с $\pi(b)=m$, отождествим R^d с M_m. Комбинируя это отождествление и $\exp_m$, с помощью теоремы 10 убеждаемся, что отображение $\exp_m\circ b$ служит обратным для нормальной координатной системы в точке m.

В *нормальной координатной окрестности* N, области определения нормального координатного отображения φ, всякую точку $n\in N$ можно соединить с $\varphi^{-1}(0)$ единственной геодезической в N.

Отметим, что если и кривизна, и кручение обращаются в нуль, то, по теореме 1, существуют координатные системы, обратные к которым переводят произвольные прямые из $U \in R^d$ в геодезические; таким образом, эти координатные системы нормальны относительно каждой из своих точек. Это аффинный вариант локальной изометрии плоского риманова многообразия с евклидовым пространством (см. следствие теоремы 9.3).

Задача 8. Показать, что экспоненциальное отображение в единичном элементе группы Ли для любой из связностей задачи 6 совпадает с экспоненциальным отображением группы Ли, если алгебру Ли отождествить с касательным пространством в единичном элементе, так что указанные связности оказываются полными.

Поэтому, в силу задачи 2.2, образ экспоненциального отображения полной аффинной связности не обязательно заполняет все многообразие, даже если это многообразие связно.

Задача 9. Пусть $G = S^3$ — мультипликативная группа единичных кватернионов. Показать, что геодезическими на S^3 служат большие круги.

6.4. Ковариантное дифференцирование и классические формулировки

6.4.1. Ковариантные производные

С помощью параллельного переноса в $T(M)$ можно определить частные производные векторных полей. Вообще это можно сделать в любом векторном расслоении, ассоциированном с $B(M)$: представление группы $Gl(d, R)$ на векторном пространстве F порождает понятие ковариантного дифференцирования сечений ассоциированного расслоения со слоем F. Дадим несколько определений, отвлекаясь от вопросов эквивалентности и независимости от выбора кривой. Фиксируем аффинную связность H с формой φ.

Пусть (W, F, G, M) — векторное расслоение, ассоциированное с $B(M)$, со слоем F и группой $G = Gl(d, R)$.