Отметим, что если и кривизна, и кручение обращаются в нуль, то, по теореме 1, существуют координатные системы, обратные к которым переводят произвольные прямые из $U \in R^d$ в геодезические; таким образом, эти координатные системы нормальны относительно каждой из своих точек. Это аффинный вариант локальной изометрии плоского риманова многообразия с евклидовым пространством (см. следствие теоремы 9.3).

Задача 8. Показать, что экспоненциальное отображение в единичном элементе группы Ли для любой из связностей задачи 6 совпадает с экспоненциальным отображением группы Ли, если алгебру Ли отождествить с касательным пространством в единичном элементе, так что указанные связности оказываются полными.

Поэтому, в силу задачи 2.2, образ экспоненциального отображения полной аффинной связности не обязательно заполняет все многообразие, даже если это многообразие связно.

Задача 9. Пусть $G=S^3$ — мультипликативная группа единичных кватернионов. Показать, что геодезическими на S^3 служат большие круги.

6.4. Ковариантное дифференцирование и классические формулировки

6.4.1. Ковариантные производные

С помощью параллельного переноса в $T(M)$ можно определить частные производные векторных полей. Вообще это можно сделать в любом векторном расслоении, ассоциированном с $B(M)$: представление группы $Gl(d, R)$ на векторном пространстве F порождает понятие ковариантного дифференцирования сечений ассоциированного расслоения со слоем F. Дадим несколько определений, отвлекаясь от вопросов эквивалентности и независимости от выбора кривой. Фиксируем аффинную связность H с формой φ.

Пусть (W, F, G, M) — векторное расслоение, ассоциированное с $B(M)$, со слоем F и группой $G=Gl(d, R)$.

Тогда каждое $b \in B(M)$ порождает такой изоморфизм F на слой над $\pi(b)$ в W, что $b(gf) = (bg)f$ при $f \in F$, $g \in G$ (§ 3.3). Пусть U — окрестность точки $m \in M$, $X: U \to W$ — сечение над U и $t \in M_m$. Мы дадим несколько определений $\nabla_t X$, *ковариантной производной сечения* X *по направлению* t. Часто также используется и обозначение $D_t X$. Прежде всего $\nabla_t X$ будет элементом слоя W над m. Если Y — векторное поле на U, то $\nabla_Y X$ будет обозначать сечение над U, заданное формулой $\nabla_Y X(n) = \nabla_{Y(n)} X$; это ковариантная производная X по направлению $Y(n)$.

(I) $\nabla_t X$ измеряет, насколько X не горизонтально в направлении t. Точнее, сравниваются подъем вектора t, порожденный сечением X, а именно dXt, и горизонтальный подъем $H'(dXt)$ вектора t, где H' — связность на W, индуцированная аффинной связностью на $B(M)$ (§ 5.4). Так как слои в W — векторные пространства, то тем способом, которым векторное пространство обычно отождествляется со своими касательными пространствами (§ 2.5), отождествим вертикальные касательные с элементами этих слоев. После отождествления определим

$$\nabla_t X = V(dXt) = dXt - H'(dXt).$$

(II) $\nabla_t X$ — это дифференцирование относительно параллельного переноса. Пусть γ — кривая в M, причем $\gamma_*(0) = t$; пусть $e_1(u), \ldots, e_k(u)$ — такой базис слоя F над $\gamma(u)$, что каждое e_i оказывается горизонтальным подъемом кривой γ, т. е. $e_i(u)$ получается параллельным переносом вектора $e_i(0)$ вдоль γ в $\gamma(u)$ (§ 5.4). Определим вещественные C^∞-функции f_i из разложения $X(\gamma(u)) = \sum_i f_i(u) e_i(u)$. Тогда

$$\nabla_t X = \sum_i f'_i(0) e_i(0).$$

(III) $\nabla_t X$ соответствует производной в горизонтальном направлении некоторой функции на $B(M)$, ассоциированной с X.

Для каждого $b \in B(M) \cap \pi^{-1}(U)$ определим

$$\tilde{X}(b) = b^{-1} X(\pi b)$$

Таким образом, $\tilde{X}$ — функция на $B(M) \cap \pi^{-1}(U)$ со значениями в F. Заметим, что $\tilde{X}(bg) = g^{-1}b^{-1}X(\pi(b)) = g^{-1}\tilde{X}(b)$. Обратно, всякая C^∞-функция $\tilde{X} : B(M) \to F$, такая, что $\tilde{X}(bg) = g^{-1}\tilde{X}(b)$, порождает сечение $X : M \to W$ вида $\pi(b) \to b\tilde{X}(b)$.

В этом случае столь же просто определить $\nabla_Y X$, как и $\nabla_t X$. Пусть $\bar{Y}$ — единственный горизонтальный подъем поля Y в W, так что $\bar{Y}(b)$ — единственная горизонтальная касательная, для которой $d\pi\bar{Y}(b) = Y(\pi(b))$. Тогда $\nabla_Y X$ — сечение, ассоциированное с функцией $\bar{Y}\tilde{X}$.

Задача 10. Доказать эквивалентность этих определений ковариантной производной.

Приведем некоторые примеры.

(I) Пусть $F = R^d$, $W = T(M)$, тогда X — обычное векторное поле. Если X параллельно вдоль γ, то $\nabla_{\gamma_*} X = 0$, и обратно.

Заметим, что в данном случае функция $\tilde{X}$ из определения (III) совпадает с $\omega(\bar{X})$, где $\bar{X}$ — любой подъем поля X в $B(M)$. С помощью этого факта и структурных уравнений можно дать удобную формулировку для $\nabla_t X$.

Теорема 11. Пусть X — векторное поле на M, $t \in M_m$, $\bar{t}$ — подъем t в $b \in B(M)$, $\bar{X}$ — подъем x.

Тогда $\nabla_t X = b(\bar{t}\omega(\bar{X}) + \varphi(\bar{t})\omega(\bar{X}(b)))$.

Доказательство. Пусть Y — правоинвариантное векторное поле на $B(M)$, продолжающее $\bar{t}$. Тогда поле $[Y - HY, \bar{X}]$ вертикально, будучи π-связанным с $[0, X]$, откуда

$$
\begin{aligned}
d\omega(Y - HY, \bar{X}) = (Y - HY)\omega(\bar{X}) - \bar{X}\omega(Y - HY) - {} \\
- \omega([Y - HY, \bar{X}]) = {} \\
= (Y - HY)\omega(\bar{X}) = {} \\
= -\varphi(Y - HY)\omega(\bar{X}) + \varphi(\bar{X})\omega(Y - HY) = {} \\
= -\varphi(Y)\omega(\tilde{X}).
\end{aligned}
$$

Вычисление в точке b дает

$$H\bar{t}\omega(\bar{X}) = \bar{t}\omega(\bar{X}) + \varphi(\bar{t})\omega(\bar{X}(b)).$$

Отображение b переводит $H\bar{t}\omega(\bar{X})$ в $\nabla_t X$, в силу определения (III), что и доказывает нашу формулу.

Из сравнения с леммой 9 легко получаем

Следствие. Кривая γ — геодезическая тогда и только тогда, когда $\nabla_{\gamma_*}\gamma_* = 0$.

(II) Если $F = \mathfrak{gl}(d, R)$ и действие G на F есть присоединенное представление, то W является расслоением, слой которого над m состоит из всех линейных преобразований M_m в себя. Сечения соответствуют горизонтальным эквивариантным R^d-значным 1-формам на $B(M)$.

(III) Согласно § 4.5, G действует на R^{d*}: если $f \in R^{d*}$, $g \in G$, $v \in R^d$, то

$$(gf)(v) = f(g^{-1}v).$$

Соответствующее расслоение W является грассмановым расслоением G^1, а его сечения — 1-формами. Действие G на R^{d*} можно единственным образом продолжить до группы гомоморфизмов алгебры Грассмана над R^{d*}. Это действие приводит к ковариантному дифференцированию дифференциальных форм.

(IV) Комбинированием действий группы G на R^d и R^{d*} определяется ее действие на тензорных произведениях экземпляров R^d и R^{d*}. Сечениями соответствующих ассоциированных векторных расслоений служат тензорные поля. Если в тензорном произведении имеется r экземпляров R^d и s экземпляров R^{d*}, то говорят, что соответствующие тензорные поля имеют тип (r, s). Например, перенос кручения является тензорным полем типа (1.2), тогда как преобразование кривизны — тензорным полем типа (1.3). Вышеуказанный пример (II) в действительности есть случай тензорного поля типа (1.1).

(V) Если X — сечение в W и f — вещественная функция на M, то fX — также сечение над M. Его ковариантная производная следующим образом связана с ковариантной производной X. Пусть $t \in M_m$, тогда

$$\nabla_t(fX) = f(m)\nabla_t X + (tf)X(m).$$

Доказательство. В силу третьего определения ковариантной производной, имеем

$$\widetilde{fX}(b) = b^{-1}(f(\pi b)\,X(\pi b)) = \\ = f(\pi b)\,b^{-1}X(\pi b) = f(\pi b)\,\tilde{X}(b),$$

т. е.

$$\widetilde{fX} = (f \circ \pi)\,\tilde{X}.$$

Отсюда

$$\bar{t}(\widetilde{fX}) = \bar{t}(f \circ \pi)\,\tilde{X}(b) + f \circ \pi(b)\,\bar{t}\tilde{X} = \\ = (tf)\,\tilde{X}(b) + f(\pi b)\,\bar{t}\tilde{X},$$

и применение отображения b к обеим сторонам равенства дает

$$\nabla_t(fX) = (tf)\,X(\pi b) + f(\pi b)\,\nabla_t X.$$

Задача 11. Показать, что на параллелизуемом M сечения тензорного расслоения находятся во взаимно однозначном соответствии с отображениями M в слой F и что ковариантному дифференцированию относительно прямой связности соответствует дифференцирование этих векторных функций.

Задача 12. На параллелизуемом многообразии M для векторных полей X, Y, таких, как в задаче 5(г), вывести следующие формулы для ковариантных производных:

прямая связность	$\nabla_X Y = 0,$
связность без кручения	$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y],$
противоположная связность	$\nabla_X Y = [X, Y].$

Задача 13. Пусть M есть d-мерное многообразие, и ∇ — ковариантная производная аффинной связности нулевого кручения над M. Пусть θ — дифференциальная форма на M, и пусть $X_1, \ldots, X_d$ — параллелизация окрестности U в M, а $\beta_1, \ldots, \beta_d$ — сопряженные 1-формы на U. Доказать следующую формулу для внешней производной θ на U:

$$d\theta = \sum \beta_i \nabla_{X_i}\theta.$$

(*Указание*: показать, что оператор справа является антидифференцированием и согласуется с d на функциях и 1-формах.)

Вывести отсюда, что дифференциальная форма замкнута, если существует аффинная связность нулевого кручения, относительно которой ковариантные производные данной формы равны нулю, т. е. если эта форма параллельна вдоль каждой кривой. (Дифференциальная форма θ *замкнута*, если $d\theta=0$.)

Задача 14. Пусть θ есть 2-форма, и X, Y, Z — векторные поля. Показать, что

$$(\nabla_X\theta)(Y, Z)=X\theta(Y, Z)-\theta(\nabla_X Y, Z)-\theta(Y, \nabla_X Z).$$

Обобщить это утверждение.

6.4.2. Определение связности с помощью ковариантной производной

Чтобы определить связность, достаточно задать ковариантное дифференцирование в касательном расслоении, поскольку первый вышеуказанный пример дает дифференциальное уравнение $\nabla_{\gamma_*}X=0$ для параллельного переноса вдоль γ. Это дифференциальное уравнение линейно и, следовательно, имеет единственное решение при любом начальном условии.

Таким образом, аффинная связность определена, коль скоро любым $m\in M$, $t\in M_m$ и векторному полю X отнесен элемент $\nabla_t X\in M_m$, такой, что

(I) $\nabla_t X$ линейно по t:

$$\nabla_{ut+vs}X=u(\nabla_t X)+v(\nabla_s X),$$

где u, $v\in R$, t, $s\in M_m$;

(II) если f — вещественная C^∞-функция на M, то

$$\nabla_t(fX)=(tf)X(m)+f(m)\nabla_t X.$$

Иногда ковариантную производную удобно обратить, т. е. для каждого векторного C^∞-поля X, заданного на открытом множестве $U \subset M$, рассмотреть линейное преобразование $\tau(X)$, определенное на каждом M_m с $m \in U$ по формуле $\tau(X)t = \nabla_t X$. Связность тогда определяется заданием преобразования $\tau(X)$, удовлетворяющего условию, соответствующему (II) : $\tau(fX)t = f(m)\tau(X)t + (tf)X(m)$ (см. [50]).

Выведем прямое соотношение между ковариантным дифференцированием векторных полей и формой связности на $B(M)$. Оно зависит от некоторого локального сечения над M в $B(M)$. Пусть $X_1, \ldots, X_d$ — такие векторные поля, определенные на открытом множестве $U \subset M$, что отображение

$$\chi : m \to (m, X_1(m), \ldots, X_d(m))$$

является сечением $U \to B(M)$. Для произвольных векторных полей $Y = \sum_i f_i X_i$ и X на U определим

$$L(XY) = \sum_i (Xf_i) X_i.$$

Ковариантная производная поля Y в направлении X и форма связности φ связаны соотношением

$$\text{(III)} \quad \nabla_{X(m)} Y = \chi(m)\varphi(d\chi X(m))\chi(m)^{-1} Y(m) + L(XY)(m),$$

где $\chi(m)$ рассматриваются теперь как отображение R^d в M_m.

Так как φ известно на вертикальных касательных, а вертикальные касательные вместе с касательными вида $d\chi t$ порождают $B(M)_{\chi(m)}$, то из формулы (III) φ определяется на всем $B(M)_{\chi(m)}$ и, значит, в силу эквивариантности, на всем $\pi^{-1}(U)$.

Задача 15. Показать, что ковариантные производные связностей комбинируются так же, как сами связности, т. е. если ∇ — ковариантная производная для связности H, Γ — ковариантная производная для связности K, f есть C^∞-функция на M, то ковариантной производной для $(f \circ \pi)H + (1 - f \circ \pi)K$ служит $f\nabla + (1 - f)\Gamma$.

6.4.3. Структурные уравнения [51]

Структурным уравнениям соответствуют формулы для преобразований кручения и кривизны в терминах ковариантных производных. Эти формулы таковы:

(I) $T_{XY}=[X, Y]-\nabla_X Y+\nabla_Y X$,

(II) $R_{XY}=\nabla_{[X,Y]}-\nabla_X\nabla_Y+\nabla_Y\nabla_X$.

Таким образом, кручение показывает, как сильно $\nabla_X Y-\nabla_Y X$ отличается от $[X, Y]$, а кривизна есть мера отличия ∇ от гомоморфизма алгебры Ли.

Задача 16. Доказать (I) и (II).

6.4.4. Координаты

Во всякой системе координат связность, определенная с помощью ковариантных производных, задается достаточно большой совокупностью вещественных функций, снабжаемых для удобства специальными индексами. Эти функции называются *коэффициентами связности.* Другие функции задают коэффициенты переноса кручения, преобразования кривизны и их ковариантные производные. Закон, по которому преобразуются эти коэффициенты при замене координатной системы на M, можно установить с помощью цепного правила для частных производных и свойств ковариантной производной.

Определим эти классические коэффициенты. Пусть $x_1, \ldots, x_d$ — координатная система на M, и положим $X_i=D_{x_i}$. Тогда

$$\nabla_{X_i}X_j=\sum_{k=1}^{d}\Gamma^k_{ij}X_k,$$

$$T_{X_iX_j}=\sum_k T^k_{ji}X_k,$$

$$R_{X_jX_k}(X_m)=-\sum_l R^l_{mjk}X_l,$$

$$\begin{aligned}\nabla R(X_j, X_k, X_s)(X_m)\quad &\text{(по определению)}\\ &=\nabla_{X_s}(R_{X_jX_k}(X_m))-R_{X_jX_k}(\nabla_{X_s}X_m)-\\ &\quad-R_{\nabla_{X_s}X_jX_k}(X_m)-R_{X_j\nabla_{X_s}X_k}(X_m)=\\ &=-\sum_i R^l_{mjk,s}X_i.\end{aligned}$$

Из структурных уравнений (п. 6.4.3) получаем

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$$

и

$$R^l_{mjk} = X_j \Gamma^l_{km} - X_k \Gamma^l_{jm} + $$

$$+ \sum_s (\Gamma^l_{js} \Gamma^s_{km} - \Gamma^l_{ks} \Gamma^s_{jm}).$$

Условием обращения кручения в нуль служит теперь равенство

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}.$$

Поэтому связности с нулевым кручением часто называются симметричными связностями. Использованные обозначения принадлежат Номидзу [51] с точностью до перемены знака T и R.

Выразим, наконец, функции Γ^k_{ij} и R^l_{mjk} непосредственно в терминах связности. Рассмотрим координатное сечение χ в расслоении $B(M)$, определенное как

$$\chi(n) = (n, X_1(n), \ldots, X_d(n)).$$

Тогда

$$R^l_{mjk} = \Phi_{lm}(d\chi X_j, d\chi X_k)$$

и

$$\Gamma^k_{ij} = \varphi_{kj}(d\chi X_i),$$

где φ_{kj} и Φ_{lm} — компоненты $\mathfrak{gl}(dR)$-значных форм φ и Φ.

Знание коэффициентов Γ^k_{ij} для каждой координатной системы из некоторого покрытия M полностью задает связность, поскольку φ достаточно определить на сечениях [см. замечание к (III) в п. 6.4.2].

З а д а ч а 17. Пусть χ — такое же сечение в расслоении $B(M)$, как и выше, ρ, ψ, P, Ψ — снесенные формы $\omega \circ d\chi$, $\varphi \circ d\chi$, $\Omega \circ d\chi$ и $\Phi \circ d\chi$. Получить следующие выражения для этих форм в координатной окрестности:

$$\rho = (dx_1, \ldots, dx_d),$$

$$\psi_{jk} = \sum_i \Gamma^j_{ik}\, dx_i,$$

$$P_k = \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

$$\Psi_{lm} = \sum_{j,k} R^l_{mjk}\, dx_j\, dx_k.$$

Вывести уравнение, определяющее R^l_{mjk} через Γ^k_{ij}, пользуясь снесенным структурным уравнением

$$d\psi = -\frac{1}{2}[\psi, \psi] + \Psi.$$

Задача 18. Снести на M формулу $d\Phi = -[\varphi, \Phi]$ (следствие, § 5.5), чтобы получить координатную форму тождества Бьянки

$$R^m_{nij,k} + R^m_{njk,i} + R^m_{nki,j} = 0.$$

Задача 19. Доказать, что если x_i — нормальные координаты в точке m, то $\Gamma^k_{ij}(m) + \Gamma^k_{ji}(m) = 0$.

Задача 20. Доказать, что кручение равно нулю в том и только в том случае, если для каждого m существует такая координатная система в m, что $\Gamma^k_{ij}(m) = 0$.

Задача 21. *Связности и действие групп.* Пусть G действует слева на M так, что если $g \in G$ и dg — тождественное преобразование на некотором M_m, то g — единичный элемент G. Пусть $b \in B(M)$, $b = (m, e_1, \ldots, e_d)$ и $I_b : G \to B(M)$, $I_b(g) = (gm, dge_1, \ldots, dge_d)$.

Доказать, что I_b — вложение.

Пусть, кроме того, G действует на $B(M)$ посредством $gb = I_b(g)$. Это послойные отображения. Аффинная связность на M *инвариантна относительно* G, если инвариантна форма связности φ, т. е. $\varphi \circ dg = \varphi$ при любом $g \in G$.

Пусть M — некоторое однородное пространство группы G; показать, что инвариантная связность на (G, M, H)

(см. задачу 5.5) индуцирует инвариантную аффинную связность на M. Пусть, как прежде, $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{h}$. Показать, что при вложении I_b элементы $\mathfrak{h}$ переходят в фундаментальные векторные поля, а элементы $\mathfrak{m}$ — в базисные векторные поля, суженные на $I_b(G)$.

Задача 22. *Связность произведения.* Пусть M', M'' — многообразия, наделенные аффинными связностями, с формами связности φ', φ'', формами смещения ω', ω'' и т. д. Пусть $M=M'\times M''$. Определим *расслоение адаптированных базисов над* M, образующих *подмногообразие в* $B(M)$:

$$B(M', M'') =$$
$$=\{((m', m''), e_1, \ldots, e_d) \mid (m', e_1, \ldots, e_{d'}) \in B(M') \text{ и } (m'', e_{d'+1}, \ldots, e_d) \in B(M'')\}.$$

Группой расслоения $B(M', M'')$ является $Gl(d')\times \times Gl(d'')$; очевидно, что $B(M', M'')$ можно отождествить с $B(M')\times B(M'')$. Определить связность $\varphi'\oplus\varphi''$ на $B(M', M'')$ и продолжить по эквивариантности до связности φ на $B(M)$. M вместе с этой аффинной связностью

$$\begin{tikzcd}
 & B(M'\times M'') & \\
B(M')_{\varphi'} \arrow[d] & B(M',M'')_{\varphi'\oplus\varphi''} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[u, hook] & B(M'')_{\varphi''} \arrow[d] \\
M' & M'\times M'' \arrow[l] \arrow[r] & M''
\end{tikzcd}$$

Рис. 23.

называется *аффинным произведением* аффинно связных многообразий M' и M''. Показать, что связность произведения обладает следующими свойствами:

(а) Пусть γ' и γ'' — кривые в M' и M'', X' и X'' — параллельные векторные поля вдоль γ' и γ'', тогда $X'+X''$ параллельно вдоль $\gamma'\times\gamma''$ и, обратно, всякое параллельное векторное поле на M имеет такой вид.

(б) Геодезические произведения являются произведением геодезических. Поэтому аффинное произведение полных связностей является полным.

(в) $$T_{s'+s'',\, t'+t''} = T'_{s',\, t'} + T''_{s'',\, t''}.$$

(г) $$R_{s'+s'',\, t'+t''} = R'_{s',\, t'} + R''_{s'',\, t''}.$$

Задача 23. Пусть $i: N \to M$ — накрывающее отображение, тогда существует индуцированное естественное накрывающее отображение $\bar{i}: B(N) \to B(M)$ (*продолжение* i). Если M наделено аффинной связностью и φ — форма связности, то $\bar{i}^*\varphi$ является формой связности на $B(N)$. Описать эту связность в терминах параллельного переноса.

Задача 24. *Связности на аффинном расслоении.* Пусть

$$A(d, R) = \left\{ \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Gl(d+1, R) \,|\, A \in Gl(d, R),\ x \in R^d \right\}$$

(x рассматривается как матрица-столбец).

$$A(M) = \{(b, t) \,|\, b \in B(M),\ t \in M_{\pi(b)}\}.$$

Определим правое действие $A(M) \times A(d, R) \to A(M)$ формулой

$$(b, t)\begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (bA,\ bx + t).$$

Показать, что при этом $A(M)$ становится главным расслоением над M (см. доказательство теоремы 10).

Если рассматривать R^d как гиперплоскость в R^{d+1}, последняя координата которой есть 1, то $A(d, R)$ действует слева на R^d:

$$\begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y = Ay + x \quad \text{при} \quad y \in R^d.$$

Поэтому существует ассоциированное расслоение $S(M)$, слои которого гомеоморфны касательным пространствам многообразия M. Раскрыть это соответствие.

Определим отображения

$$\eta\colon B(M)\to A(M),$$
$$\eta_G\colon Gl(d, R)\to A(d, R)$$

равенствами $\eta(b)=(b, 0)$, $\eta_G(A)=\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; показать, что это послойное отображение $B(M)$ в $A(M)$, индуцирующее тождественное преобразование базы M.

Пусть ω — форма смещения на $B(M)$; рассмотрим связность φ на $B(M)$ с формами кривизны и кручения Φ и Ω.

Алгебру Ли группы $A(d, R)$ можно реализовать как

$$\mathfrak{a}(d, R)=\left\{\begin{pmatrix} X & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}\middle| X\in\mathfrak{gl}(d, R),\ x\in R^d\right\}.$$

Определим $\mathfrak{a}(d, R)$-значную форму $\bar\varphi$ на $\eta(B(M))$ из условия $\eta^*\bar\varphi=\begin{pmatrix} \varphi & \omega\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; показать, что с помощью правого сдвига $\bar\varphi$ можно продолжить до формы связности на $A(M)$, также обозначаемой через $\bar\varphi$. Пусть $\bar\Phi$ — соответствующая форма кривизны; показать, что

$$\eta^*\bar\Phi=\begin{pmatrix} \Phi & \Omega\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Связность на $A(M)$, индуцированная таким образом связностью на $B(M)$, является частным случаем картановской связности (см. [31, 32, 82]). Рассматривая вместо ω другие горизонтальные R^d-значные эквивариантные формы, можно определить более общие картановские связности; вообще все связности на $A(M)$, распределения которых отличны от $T(\eta(B(M)))$, порождаются таким образом, поскольку $\mathfrak{gl}(d, R)$ приводимо в $\mathfrak{a}(d, R)$.

Возвращаясь к связности $\bar\varphi$, отметим, что параллельный перенос, индуцируемый в ассоциированном расслоении $S(M)$, порождает аффинные преобразования касательных пространств к M, зависящие и от кривизны, и от кручения φ на $B(M)$.

Инфинитезимально преобразование кривизны $\bar{R}$ можно определить аналогично преобразованию кривизны аффинной связности следующим образом.

Пусть x, y, $z \in M_m$, $(b, t) \in A(M)$, $\pi(b, t) = m$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ — подъемы x, y в (b, t). Тогда

$$\bar{R}_{xy}z = -(b, t)\bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{y})(b, t)^{-1}z;$$

здесь слой $S(M)$ над m отождествлен с M_m.

Выбирая $(b, t) \in \eta(B(M))$, показать, что

$$\bar{R}_{xy}z = R_{xy}z + T_{xy}.$$