ГЛАВА 7

Римановы многообразия

На многообразии определяется риманова структура и доказывается, что соответствующая топологическая метрика индуцирует исходную топологию. Определяется расслоение (ортонормальных) реперов, доказывается существование и единственность римановой связности. Заканчивается глава большим набором примеров [22, 33, 80].

7.1. Определения и элементарные свойства

7.1.1. Римановы метрики и ассоциированные топологические метрики

Риманово многообразие — это многообразие M, в каждой точке m которого задана положительно определенная симметричная билинейная форма $\langle\, ,\rangle$ на M_m, причем это соответствие принадлежит C^∞ в том смысле, что для всякой координатной системы $(x_1, \ldots, x_d)$ функции $g_{ij} = \langle D_{x_i}, D_{x_j}\rangle \in C^\infty$. Такое соответствие называется *римановой метрикой* на M.

С помощью $Sy(M)$, расслоения симметрических положительно определенных тензоров типа (2,0), можно дать более изящный вариант этого определения: риманово многообразие — это многообразие с выделенным C^∞-сечением расслоения $Sy(M)$.

Пусть M, N — римановы многообразия с метрикой $\langle\, ,\rangle_M$ и $\langle\, ,\rangle_N$. Тогда C^∞-отображение $f: M \to N$ называется *изометрией*, если оно является гомеоморфизмом и сохраняет метрику, т. е. $\langle dft, dfs\rangle_N = \langle t, s\rangle_M$ при t, $s \in M_m$. Изометрия является диффеоморфизмом. Отображение f называется *локальной изометрией*, если не требуется взаимной однозначности.

Если M — ориентированное риманово многообразие, то существует единственная d-форма θ, определяющая ориентацию, такая, что $\theta(e_1, \ldots, e_d) = \pm 1$ при любом ортонормальном базисе $e_1, \ldots, e_d$ пространства M_m. Форма θ называется *римановым элементом объема* этого ориентированного риманова многообразия.

Примеры в этой главе приведены в последнем параграфе.

Пусть $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система на многообразии M с областью определения O. Тогда на касательных пространствах к O имеется естественное скалярное произведение, а именно евклидово скалярное произведение $\langle D_{x_i}, D_{x_j}\rangle = \delta_{ij}$. Обозначим через $\| \ \|'$ соответствующую евклидову норму.

Обозначим через $\| \ \|$ риманову норму, т. е. $\| t \| = \langle t, t\rangle^{1/2}$, $t \in T(M)$, так что $\| D_{x_i} \| = (g_{ii})^{1/2} \in C^\infty$, и вообще $\left\| \sum_i a_i D_{x_i} \right\| \in C^\infty$ при $a_i \in C^\infty$.

Если вместо положительной определенности требуется лишь невырожденность «билинейной формы» $\langle \ , \ \rangle$, то M называется *полуримановым многообразием*. Основной результат настоящей главы — существование и единственность римановой связности — справедлив и в полуримановом случае.

Задача 1. Индексом симметричной квадратичной формы на вещественном векторном пространстве называется размерность максимального подпространства, на котором эта форма отрицательно определена. Доказать, что для связного полуриманова многообразия индекс его метрики одинаков на всех касательных пространствах.

В случае несвязного полуриманова многообразия мы также будем требовать, чтобы этот индекс был постоянным.

Многообразие с индексом 1 или $d-1$ называется *лоренцевым многообразием*. Четырехмерное пространство — время Эйнштейна является лоренцевым многообразием.

Длина ломаной C^∞-кривой γ в M определяется интегралом

$$|\gamma| = \int_a^b \|\gamma_*\|,$$

где $[a, b]$ — область определения γ.

Задача 2. Пусть γ — ломаная C^∞-кривая с областью определения $[a, b]$. Рассмотрим неубывающую непрерывную функцию f на $[a, b]$:

$$f(x) = \int_a^x \|\gamma_*\|.$$

(а) Показать, что $f \in C^\infty$ во всякой точке, где $\gamma_*(x)$ существует и отлично от нуля.

(б) Показать, что $\gamma \circ f^{-1} : [0, |\gamma|] \to M$ есть непрерывная корректно определенная функция, даже если f^{-1} не однозначно, и что она принадлежит C^∞ в каждой точке $f(x)$, где $\gamma_*(x) \neq 0$.

(в) Пусть (x, y) — координатная система на двумерном многообразии, а γ — это C^∞-кривая, определенная на интервале, содержащем внутри себя 0, уравнениями

$$x(\gamma(t)) = \int_0^t [\exp(-1/s^2) \sin 1/s]^2 \, ds,$$

$$y(\gamma(t)) = \int_0^t \exp(-1/s^2) \sin 1/s \, ds.$$

Показать, что в этом случае $\gamma \circ f^{-1}$ не является ломаной C^∞-кривой, так что на γ нельзя ввести параметр длины с тем, чтобы кривая осталась ломаной C^∞-кривой.

Рассмотрим функцию $\rho : M \times M \to R \cup \{+\infty\}$ вида

$$\rho(m, n) = \inf_{\gamma \in \Gamma} |\gamma|,$$

где Γ — множество всех ломаных C^∞-кривых, соединяющих m с n.

Лемма 1. Функция ρ является метрикой на M.

Доказательство. Очевидно, что эта функция симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника, поэтому надо лишь проверить, что из $\rho(m, n)=0$ следует $m=n$. Предположим, что $m\neq n$, и пусть $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система в m с областью определения U. Пусть O — такой координатный шар, что $\overline{O}\subset U$ и $n\notin O$. Определим функцию $f: R^d\times U\to R$ формулой

$$f(a_1, \ldots, a_d, m)=\left\|\sum a_i D_{x_i}(m)\right\|.$$

Функция $f|_{S^{d-1}\times U}$ непрерывна и положительна и, следовательно, при некотором $k>0$

$$\frac{1}{k}\leqslant f|_{S^{d-1}\times \overline{O}}\leqslant k.$$

Далее, $\left\|\sum a_i D_{x_i}(m)\right\|'=1$ на $S^{d-1}\times O$, откуда

$$\frac{1}{k}\left\|\sum a_i D_{x_i}(m)\right\|'\leqslant\left\|\sum a_i D_{x_i}(m)\right\|\leqslant k\left\|\sum a_i D_{x_i}(m)\right\|' \quad (1)$$

при $(a_1, \ldots, a_d, m)\in S^{d-1}\times\overline{O}$. В силу того, что все выражения в (1) однородны по a_i, неравенства (1) справедливы при $(a_1, \ldots, a_d, m)\in R^d\times\overline{O}$. Пусть теперь γ — произвольная ломаная C^∞-кривая, соединяющая m

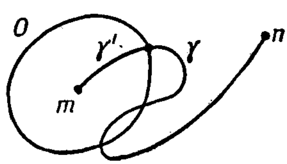

Рис. 24.

с n, и γ' — часть γ от m до точки, в которой γ впервые пересекает границу шара O. Если α — радиус шара O, то

$$\rho(m, n)=\inf|\gamma|\geqslant\inf|\gamma'|\geqslant\frac{1}{k}\inf|\gamma'|'\geqslant\frac{1}{k}\alpha>0,$$

что завершает доказательство леммы.

Задача 3. В этом доказательстве мы воспользовались теоремой о том, что в евклидовом пространстве $|\sigma|' \geqslant \alpha$ для всякой кривой σ, соединяющей начало координат с точкой на сфере радиуса α. Доказать это утверждение, а также то, что равенство достигается, лишь если σ — ломаная C^∞-репараметризация прямой линии. [*Указание*: пусть $r = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$. Разложить $\sigma_*(t)$ на две составляющие: одна составляющая σ_{*T} — это касательная к лучу, исходящему из начала координат, а другая — нормальна к этому лучу. Показать, что $|d(r \circ \sigma)/dt| = \|\sigma_{*T}\|$, и применить основную теорему интегрального исчисления. Сравнить с аналогичной теоремой о геодезических риманова многообразия в § 8.1.]

Теорема 1. Топология, задаваемая метрикой ρ, эквивалентна исходной топологии многообразия M, и потому ρ — непрерывная функция на $M \times M$.

Доказательство. Достаточно для каждой точки $m_0 \in M$ найти окрестность P, топология которой задается метрикой ρ. Пусть $x_1, \ldots, x_d$ — координатная система в m_0, O — открытый шар относительно этих x_i с центром в m_0, O_1 — аналогичный шар, но $\bar{O}_1 \subset O$. Пусть ρ' — евклидова метрика на O, определенная координатами x_i, так что ρ' определяет топологию на O. Таким образом, достаточно найти такие окрестность P точки m_0 и число $c > 0$, что $P \subset O$ и $(1/c)\rho' \leqslant \rho \leqslant c\rho'$ на $P \times P$. Из неравенства (1) следует, что существует такое $c > 0$, для которого

$$\frac{1}{c}\|t\|' \leqslant \|t\| \leqslant c\|t\|'$$

при $t \in M_m$, $m \in \bar{O}_1$. Отсюда для всякой ломаной C^∞-кривой в O_1 имеем $(1/c)|\gamma|' \leqslant |\gamma| \leqslant c|\gamma|'$. Поэтому надо позаботиться лишь о кривых, выходящих из O_1. Снова прибегнем к обрезанию. Пусть δ_1 есть ρ'-радиус O_1 и $\beta \leqslant \delta_1/(2c^2+1)$. Пусть P — открытый шар радиуса β относительно x_i с центром m_0. Теперь уже ясно, что для доказательства неравенств

$$\frac{1}{c}\rho' \leqslant \rho \leqslant c\rho'$$

на $P\times P$ достаточно только проверить, что при вычислении ρ на $P\times P$ можно ограничиться кривыми, содержащимися в O_1. Иначе говоря, если $(m, n)\in P\times P$ и γ — кривая, соединяющая m с n, то существует кривая $\bar\gamma$, такая, что $|\bar\gamma|\leqslant|\gamma|$, и $\bar\gamma$ принадлежит O_1. Пусть γ_1 — это

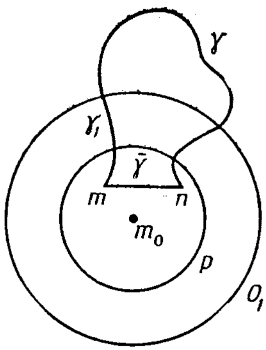

Рис. 25.

часть γ от точки m до первого пересечения γ с границей O_1, и пусть $\bar\gamma$ — отрезок прямой от m до n относительно x_i. Тогда

$$|\gamma|\geqslant|\gamma_1|\geqslant\frac{1}{c}|\gamma_1|'\geqslant\frac{1}{c}(\delta_1-\beta)\geqslant 2c\beta\geqslant c|\bar\gamma|'\geqslant|\bar\gamma|.$$

Ч. т. д.

Прежде чем продолжать изучение римановых многообразий, покажем, что большой класс многообразий допускает риманову структуру.

Теорема 2. Паракомпактное многообразие M допускает риманову метрику.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — покрытие M координатными окрестностями, $\{f_i\}$ — локально конечное C^∞-разложение единицы, подчиненное этому покрытию. Пусть $(x_1^i, \ldots, x_d^i)$ — координатная система, ассоциированная с U_i, и $\langle\,,\,\rangle$ — евклидово скалярное произведение, определенное на U_i посредством x_j^i. Тогда на M определяется скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle = \sum f_i \langle\ ,\ \rangle_i$.

Замечание. Для вещественных аналитических многообразий имеется аналогичный результат, вытекающий из решения проблемы аналитического вложения [17, 48].

7.1.2. Векторные расслоения

Пусть (B, R^n, M) есть n-мерное векторное расслоение над M (см. § 3.3, п. (4)) с пространством расслоения B и слоем R^n. *Риманова метрика* на векторном расслоении B — это симметричная положительно определенная билинейная форма класса C^∞ на его слоях. Последнее означает следующее. Пусть $U \subset M$ и χ_1, χ_2 есть C^∞-сечения над U в B. Тогда функция f: $U \to R$, заданная формулой $f(m) = \langle \chi_1(m), \chi_2(m) \rangle$, принадлежит C^∞.

Так же как и выше, можно показать, что всякое n-мерное векторное расслоение B над паракомпактной базой M допускает риманову метрику. Действительно, пусть $U \subset M$ — открытое множество и $\pi^{-1}(U)$ диффеоморфно $R^n \times U$. Тогда в $\pi^{-1}(U)$ с помощью базиса в R^n легко найти n линейно независимых C^∞-сечений $\chi_1, \ldots$ $\ldots, \chi_n$ над U. На $\pi^{-1}(U)$ можно определить риманову метрику, положив $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$. Далее доказательство проходит аналогично доказательству теоремы 2 с использованием покрытия M открытыми множествами, над которыми B тривиально, и ассоциированного разложения единицы.

7.2. Расслоение ортонормальных базисов

Пусть M — риманово многообразие. Мы уже рассматривали расслоение базисов $B(M)$ над M. Пусть $F(M) = \{(m, e_1, \ldots, e_d) \mid m \in M,\ e_1, \ldots, e_d$ — ортонормальный базис в $M_m\}$ и π': $F(M) \to M$ — очевидная проекция. $F(M) \subset B(M)$. Мы наделим множество $F(M)$ структурой локального произведения, которая превратит его в подмногообразие многообразия $B(M)$ и в главное расслоение над M, называемое *расслоением ортонормальных*