ние, определенное на U_i посредством x^i_j. Тогда на M определяется скалярное произведение $\langle\,,\rangle=\sum f_i\langle\,,\rangle_i$.

Замечание. Для вещественных аналитических многообразий имеется аналогичный результат, вытекающий из решения проблемы аналитического вложения [17, 48].

7.1.2. Векторные расслоения

Пусть (B, R^n, M) есть n-мерное векторное расслоение над M (см. § 3.3, п. (4)) с пространством расслоения B и слоем R^n. *Риманова метрика* на векторном расслоении B — это симметричная положительно определенная билинейная форма класса C^∞ на его слоях. Последнее означает следующее. Пусть $U\subset M$ и χ_1, χ_2 есть C^∞-сечения над U в B. Тогда функция f: $U\to R$, заданная формулой $f(m)=\langle\chi_1(m), \chi_2(m)\rangle$, принадлежит C^∞.

Так же как и выше, можно показать, что всякое n-мерное векторное расслоение B над паракомпактной базой M допускает риманову метрику. Действительно, пусть $U\subset M$ — открытое множество и $\pi^{-1}(U)$ диффеоморфно $R^n\times U$. Тогда в $\pi^{-1}(U)$ с помощью базиса в R^n легко найти n линейно независимых C^∞-сечений $\chi_1, \ldots$ $\ldots, \chi_n$ над U. На $\pi^{-1}(U)$ можно определить риманову метрику, положив $\langle\chi_i, \chi_j\rangle=\delta_{ij}$. Далее доказательство проходит аналогично доказательству теоремы 2 с использованием покрытия M открытыми множествами, над которыми B тривиально, и ассоциированного разложения единицы.

7.2. Расслоение ортонормальных базисов

Пусть M — риманово многообразие. Мы уже рассматривали расслоение базисов $B(M)$ над M. Пусть $F(M)=\{(m, e_1, \ldots, e_d)\,|\,m\in M, e_1, \ldots, e_d$ — ортонормальный базис в $M_m\}$ и π': $F(M)\to M$ — очевидная проекция. $F(M)\subset B(M)$. Мы наделим множество $F(M)$ структурой локального произведения, которая превратит его в подмногообразие многообразия $B(M)$ и в главное расслоение над M, называемое *расслоением ортонормальных* *базисов*; это расслоение порождается приведением группы расслоения $B(M)$ к ортогональной группе.

Пусть $m \in M$, $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система в m с областью определения U. Построим некоторое отображение

$$\lambda_U : U \to Gl(d, R).$$

Пусть $V_1, \ldots, V_d$ — векторные поля на U, определенные следующим условием: при любом $n \in U$ система $V_1(n), \ldots, V_d(n)$ является ортонормализацией Грама — Шмидта системы $D_{x_1}(n), \ldots, D_{x_d}(n)$. Тогда $\lambda_U(n)$ определяется выражением

$$V_i(n) = \sum_{j=1}^{i} (\lambda_U(n))_{ij} D_{x_j}(n).$$

Определим далее отображения

$$\varphi_U\colon \pi^{-1}(U) \to Gl(d, R),$$
$$\varphi'_U\colon \pi'^{-1}(U) \to O(d)$$

из следующих соотношений:

$$e_i = \sum (\varphi_U(n, e_1, \ldots, e_d))_{ij} V_j(n),$$
$$f_i = \sum (\varphi'_U(n, f_1, \ldots, f_d))_{ij} V_j(n),$$

$i = 1, \ldots, d$, где $(n, e_1, \ldots, e_d) \in B(M)$, $(n, f_1, \ldots, f_d) \in \in F(M)$. Поступая таким образом с координатными окрестностями некоторого покрытия и определяя правое действие так же, как в § 3.2, превратим $B(M)$ и $F(M)$ в главные расслоения, локальные представления которых в виде произведений совместимы с их гладкой структурой. В частности, $F(M)$ является многообразием и имеет структурную группу $O(d)$, тогда как λ_U, являясь, очевидно, отображением класса C^∞, показывает, что структура расслоения, определенная на $B(M)$, совпадает с введенной раньше. Далее, из результатов § 3.4 немедленно следует, что $F(M)$ представляет приведение группы $Gl(d, R)$ расслоения $B(M)$ к подгруппе $O(d)$ и что $F(M)$ — подмногообразие в $B(M)$.

Алгебру Ли $\mathfrak{o}(d)$ можно рассматривать как множество всех $d\times d$-кососимметричных вещественных матриц. Тогда $\{X_{ij}-X_{ji}\,|\,i<j\}$, где X_{ij} — матрицы, определенные в п. 6.1.2, очевидно, являются базисом в $\mathfrak{o}(d)$. Поэтому $\lambda\mathfrak{o}(d)=\bar{\mathfrak{o}}(d)$ допускает в качестве базиса систему $\{F_{ij}=E_{ij}-E_{ji}\,|\,i<j\}$. Другими словами, при каждом $f\in F(M)$ вертикальное касательное пространство к

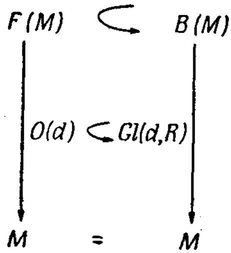

Рис. 26.

$F(M)$, а именно $V'_f=V_f\cap F(M)_f$, где V_f — вертикальное касательное пространство к $B(M)$, порождается касательными

$$\{F_{ij}(f)=E_{ij}(f)-E_{ji}(f)\,|\,i<j\}.$$

Пусть H' — связность на $F(M)$; тогда с помощью правого действия ее можно продолжить до связности H на $B(M)$. Связность порождает параллельный перенос касательных к M вдоль кривых в M. Далее, очевидно, что этот параллельный перенос сохраняет скалярные произведения, поскольку он определяется посредством $F(M)$, переводя один ортонормальный базис в другой.

Обратно, если H — связность на $B(M)$, при которой параллельный перенос сохраняет скалярные произведения, то H индуцируется некоторой связностью H' на $F(M)$ описанным выше способом. Действительно, пусть $b=(m, f_1, \ldots, f_d)\in F(M)$ и γ — горизонтальная кривая в $B(M)$, проходящая через $(m, f_1, \ldots, f_d)$. Тогда каждая точка на γ должна принадлежать $F(M)$, так как параллельный перенос вдоль $\pi\circ\gamma$, по предположению, переводит $f_1, \ldots, f_d$ в ортонормальные базисы. Следовательно, $H_b \subset F(M)_b$ и потому H' можно определить из условия $H'_b = H_b$.

Задача 4. Доказать, что приведение группы расслоения $B(M)$ к $O(d)$ однозначно порождает риманову метрику, при которой приведенным расслоением оказывается $F(M)$.

Задача 5. Распространить результаты этого параграфа на случай римановой метрики на произвольном векторном расслоении.

Замечание. Аналогично, полуриманова структура на M порождает приведение $B(M)$ к подгруппе группы $Gl(d, R)$, оставляющей инвариантной некоторую невырожденную симметричную билинейную форму, и обратно.

7.3. Римановы связности

Пусть M — риманово многообразие. Связность на $B(M)$ называется *римановой связностью*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(I) параллельный перенос сохраняет скалярные произведения,

(II) форма кручения равна нулю.

Заметим, что ввиду вышесказанного связность на $B(M)$ является римановой тогда и только тогда, когда она является продолжением связности расслоения $F(M)$, форма кручения которой равна нулю. В предыдущей главе мы определили форму смещения ω на $B(M)$. Пусть i: $F(M) \subsetneq B(M)$ — отображение включения; вновь обозначим через ω горизонтальную 1-форму $i^*\omega$ на $F(M)$. Если H' — связность на $F(M)$, H — ее продолжение на $B(M)$ и соответствующие 1-формы обозначены через φ и φ', то первое структурное уравнение (теорема 6.4) сносится на $F(M)$ в уравнение

$$d\omega = -\varphi'\omega + i^*\Omega.$$

Поэтому распределение H является римановой связностью в том и только в том случае, если оно порож-