переводит $f_1, \ldots, f_d$ в ортонормальные базисы. Следовательно, $H_b \subset F(M)_b$ и потому H' можно определить из условия $H'_b = H_b$.

Задача 4. Доказать, что приведение группы расслоения $B(M)$ к $O(d)$ однозначно порождает риманову метрику, при которой приведенным расслоением оказывается $F(M)$.

Задача 5. Распространить результаты этого параграфа на случай римановой метрики на произвольном векторном расслоении.

Замечание. Аналогично, полуриманова структура на M порождает приведение $B(M)$ к подгруппе группы $Gl(d, R)$, оставляющей инвариантной некоторую невырожденную симметричную билинейную форму, и обратно.

7.3. Римановы связности

Пусть M — риманово многообразие. Связность на $B(M)$ называется *римановой связностью*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(I) параллельный перенос сохраняет скалярные произведения,

(II) форма кручения равна нулю.

Заметим, что ввиду вышесказанного связность на $B(M)$ является римановой тогда и только тогда, когда она является продолжением связности расслоения $F(M)$, форма кручения которой равна нулю. В предыдущей главе мы определили форму смещения ω на $B(M)$. Пусть i: $F(M) \subsetneq B(M)$ — отображение включения; вновь обозначим через ω горизонтальную 1-форму $i^*\omega$ на $F(M)$. Если H' — связность на $F(M)$, H — ее продолжение на $B(M)$ и соответствующие 1-формы обозначены через φ и φ', то первое структурное уравнение (теорема 6.4) сносится на $F(M)$ в уравнение

$$d\omega = -\varphi'\omega + i^*\Omega.$$

Поэтому распределение H является римановой связностью в том и только в том случае, если оно порождается некоторой связностью на $F(M)$, также называемой римановой, 1-форма φ' которой удовлетворяет соотношению $d\omega = -\varphi'\omega$.

Лемма 2. Между горизонтальными $\mathfrak{o}(d)$-значными 1-формами τ на $F(M)$ и горизонтальными R^d-значными 2-формами можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором 1-форме τ соответствует 2-форма $\tau\omega$. Даже если форма τ не горизонтальна, она определяется формой $\tau\omega$.

Доказательство. Покажем вначале, что для всякой горизонтальной 2-формы Ω найдется единственная горизонтальная 1-форма τ, такая, что $\Omega = \tau\omega$. Пусть $K(x, y, z) = \langle \Omega(x, y), \omega(z) \rangle$. Это выражение 3-линейно, горизонтально и кососимметрично по первым двум переменным. Поскольку образом ω служит все R^d, существует единственное $\tau(x) \in \mathfrak{gl}(d, R)$, $x \in F(M)_f$, такое, что при любых $y, z \in F(M)_f$

$$2\langle \tau(x)\omega(y), \omega(z) \rangle = K(x, y, z) + K(z, y, x) - K(x, z, y).$$

Этим $\tau(x)$ действительно определено, поскольку прибавление вертикальных векторов к y и z, не меняющее $\omega(y)$ и $\omega(z)$, не меняет и правой части равенства. Очевидно, τ горизонтально.

Так как перестановка y и z в правой части равенства изменяет ее знак, $\tau(x)$ должно принадлежать $\mathfrak{o}(d)$. Для доказательства равенства $\tau\omega = \Omega$ достаточно проверить, что

$$K(x, y, z) = \langle \tau(x)\omega(y), \omega(z) \rangle - \langle \tau(y)\omega(x), \omega(z) \rangle.$$

Но это так, поскольку сумма второго и третьего членов правой части предыдущего равенства инвариантна относительно перестановки x и y, тогда как первый член меняет при этом знак.

Если τ не горизонтально, то, подставив $\tau\omega$ на место Ω в определении K, автоматически получаем, что $2\langle \tau(x)\omega(y), \omega(z) \rangle$ выражается, как и прежде, через K, откуда $\tau\omega$ определяет τ. Ч. Т. Д.

Замечание. Лемму 2 можно доказать, проверив взаимную однозначность отображения $\tau \to \tau\omega$ и привлекая соображения размерности. Лемма также имеет место, если τ принимает значения в подалгебре, состоящей из всех линейных преобразований, кососимметричных относительно некоторой невырожденной симметричной билинейной формы на R^d.

Теорема 3. Существует взаимно однозначное соответствие между связностями на $F(M)$ и горизонтальными эквивариантными 2-формами на $F(M)$. В качестве соответствующих 2-форм можно брать формы кручения этих связностей, так что две связности равны в том и только в том случае, если равны их кручения.

Доказательство. Пусть φ — форма связности на $F(M)$. Зафиксировав φ, получим взаимно однозначное соответствие между формами связности ψ на $F(M)$ и формами разности $\tau=\psi-\varphi$, которыми являются любые $\mathfrak{o}(d)$-значные горизонтальные эквивариантные 1-формы. По лемме, τ определяется через $\tau\omega$, и легко проверить, что τ эквивариантно тогда и только тогда, когда $\tau\omega$ эквивариантно. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между связностями на $F(M)$ и горизонтальными эквивариантными 2-формами $\tau\omega$.

Наконец, из первого структурного уравнения получаем

$$d\omega = -\varphi\omega+\Omega, \qquad d\omega = -\psi\omega+\Omega_1,$$

откуда

$$\tau\omega = (\psi-\varphi)\,\omega = \Omega_1-\Omega,$$

т. е. $\Omega_1=\tau\omega+\Omega$. Поэтому, выбирая $\tau\omega=-\Omega$, мы получим некоторую связность φ_0 с нулевым кручением. Если бы мы начали с φ_0 вместо φ, то получили бы $\Omega_1=\tau\omega$, т. е. установили бы соответствие между связностями и формами кручения. Ч. Т. Д.

Задача 6. Выразить φ_0 через ω и $d\omega$, исходя из вышеуказанной леммы и того, что $\varphi_0\omega=-d\omega$.

Теорема 4. На $F(M)$ существует единственная связность с нулевым кручением; таким образом, на $B(M)$ имеется единственная риманова связность.

(Это следует непосредственно из предшествующего доказательства.)

Замечание. Из предыдущего замечания ясно, что тем же методом можно доказать существование и единственность римановой связности (определение такое же) для полуримановых структур.

Предложение. Связности на $F(M)$, имеющие те же геодезические, что и данная связность, находятся во взаимно однозначном соответствии с горизонтальными эквивариантными 3-формами на $F(M)$.

Доказательство. Совпадение геодезических двух связностей равносильно тому, что форма их разности τ удовлетворяет условию $\tau(x)\omega(y) = -\tau(y)\omega(x)$ (теорема 6.9); 3-линейная функция $\langle\tau(x)\omega(y), \omega(z)\rangle$ является 3-формой в том и только в том случае, если τ удовлетворяет этому условию и $\mathfrak{o}(d)$-значно. Без труда проверяется, что она горизонтальна и эквивариантна. [Здесь эквивариантность означает инвариантность относительно правого действия группы $O(d)$.]

Задача 7. На двумерном римановом многообразии разные связности на $F(M)$ имеют разные геодезические.

Задача 8. Доказать, что изометрия связного риманова многообразия определяется своими значением и дифференциалом в одной точке по такой схеме:

(а) Вначале задачу свести к тому, что изометрия, которая оставляет неподвижными некоторую точку и касательное пространство в ней, является тождественным отображением.

(б) Изометрия переводит геодезические в геодезические.

(в) Показать, что изометрия, которая оставляет неподвижными некоторую точку и касательное пространство в ней, является тождественной в некоторой окрестности этой точки.

(г) Совокупность всех неподвижных точек непрерывного отображения является замкнутым множеством.

7.4. Примеры и задачи

1. *Евклидово пространство.* Для каждого $m \in R^d$ положим $\langle D_i(m), D_j(m)\rangle = \delta_{ij}$, определив тем самым так называемую *плоскую риманову метрику на* R^d. Если не оговорено противное, метрика на R^d будет предполагаться плоской.

Задача 9. Показать, что связность на пространстве R^d, заданная его групповой структурой, как в задаче 6.6, является римановой, и потому эта риманова связность действительно является плоской. Найти геодезические.

2. *Одномерные римановы многообразия.* Так как римановы многообразия метризуемы, то они паракомпактны, поэтому подлежащее многообразие связного одномерного риманова многообразия должно совпадать либо с R, либо с S^1. В каждом случае имеется только два векторных поля с постоянной нормой, равной 1; интегральная кривая такого векторного поля порождает изометрию многообразия с интервалом из R (см. пример 1) или накрывающее отображение R на S^1, являющееся локальной изометрией и периодической функцией на R. В последнем случае наименьший период является *длиной* S^1, а после деления на 2π — *радиусом* S^1, так как S^1 можно вложить в R^2 как окружность такого радиуса (см. пример 3).

3. *Вложения.* Пусть $i: N \to M$ есть C^∞-вложение (или в более общем случае погружение) и M — риманово многообразие. Тогда на N имеется единственная риманова метрика, при которой di сохраняет скалярные произведения. Если N снабжено этой метрикой, то говорят, что *i — изометричное вложение (погружение).* Весьма трудная теорема Нэша [55] утверждает, что каждое риманово многообразие допускает изометрическое вложе-