ство в ней, является тождественной в некоторой окрестности этой точки.

(г) Совокупность всех неподвижных точек непрерывного отображения является замкнутым множеством.

7.4. Примеры и задачи

1. *Евклидово пространство.* Для каждого $m \in R^d$ положим $\langle D_i(m), D_j(m)\rangle = \delta_{ij}$, определив тем самым так называемую *плоскую риманову метрику на* R^d. Если не оговорено противное, метрика на R^d будет предполагаться плоской.

Задача 9. Показать, что связность на пространстве R^d, заданная его групповой структурой, как в задаче 6.6, является римановой, и потому эта риманова связность действительно является плоской. Найти геодезические.

2. *Одномерные римановы многообразия.* Так как римановы многообразия метризуемы, то они паракомпактны, поэтому подлежащее многообразие связного одномерного риманова многообразия должно совпадать либо с R, либо с S^1. В каждом случае имеется только два векторных поля с постоянной нормой, равной 1; интегральная кривая такого векторного поля порождает изометрию многообразия с интервалом из R (см. пример 1) или накрывающее отображение R на S^1, являющееся локальной изометрией и периодической функцией на R. В последнем случае наименьший период является *длиной* S^1, а после деления на 2π — *радиусом* S^1, так как S^1 можно вложить в R^2 как окружность такого радиуса (см. пример 3).

3. *Вложения.* Пусть $i: N \to M$ есть C^∞-вложение (или в более общем случае погружение) и M — риманово многообразие. Тогда на N имеется единственная риманова метрика, при которой di сохраняет скалярные произведения. Если N снабжено этой метрикой, то говорят, что i — *изометричное вложение (погружение).* Весьма трудная теорема Нэша [55] утверждает, что каждое риманово многообразие допускает изометрическое вложе-

ние в произвольно малую окрестность в евклидовом пространстве размерности $d(d+1)(3d+11)/2$, а если это многообразие компактно, то размерности $d(3d+11)/2$. Один из более трудных открытых вопросов — насколько можно усилить эту теорему, сокращая разрыв в размерностях, а также определяя степень неединственности. (Погружения определяются и рассматриваются в гл. 10.)

Задача 10. Рассмотреть поверхность вращения вокруг оси u_3 окружности радиуса r с центром $(s, 0, 0)$, $r<s$, расположенной в плоскости $u_2=0$. Представить ее как образ вложения 2-тора T^2. Вычислить риманову метрику.

4. *Риманова d-сфера* радиуса r, $S^d=\{x\in R^{d+1} \mid \|x\|=r\}$, наделяется римановой метрикой, индуцированной из R^{d+1}. Все изометрии являются вращениями, поэтому S^d допускает $O(d+1)$ как транзитивную группу изометрий.

Задача 11. Пусть $x_0, \ldots, x_{d-1}$ — линейно независимые точки в R^{d+1}, лежащие на S^d. Показать, что существует единственное изометрическое вложение S^k, k-сферы радиуса r, в S^d, чей образ содержит $x_0, \ldots, x_k$, $k=1, \ldots, d-1$. Это дает цепочку $S^1\subset S^2\subset \ldots \subset S^{d-1}\subset S^d$. Доказать, что всякую такую цепочку можно отобразить на любую другую с помощью некоторого элемента из $SO(d+1)$.

Задача 12. Установить следующие свойства S^d:

(а) Для любого $m\in S^d$ существует единственная изометрия j_m, оставляющая m неподвижным, и такая, что dj_m является отображением умножения на -1 в пространстве $S^d{}_m$.

(б) Для каждого ненулевого $t\in S^d{}_m$ найдется единственная большая окружность $S^1(t)$, касающаяся t, причем $S^1(t)$ инвариантна относительно j_m, т. е. $S^1(t)=j_m(S^1(t))=S^1(-t)$.

(в) Если X — параллельное векторное поле вдоль $S^1(t)$, то $dj_mX=-X$.

(г) Пусть m, n, p — три равноотстоящие точки на $S^1(t)$, и $X(m)=t$. Используя j_n, показать, что $X(p)$

является касательной к $S^1(t)$ в p и, следовательно, $S^1(t)$ — геодезическая.

5. *Римановы произведения.* Пусть M' и M'' — римановы многообразия; $M=M'\times M''$ становится римановым многообразием, если скалярные произведения определить следующим образом:

$$\langle s'+s'', t'+t''\rangle = \langle s', t'\rangle' + \langle s'', t''\rangle'',$$

т. е. касательные одного многообразия считаются перпендикулярными к касательным другого; M называется тогда *римановым произведением* M' *и* M''. Например, R^d есть d-кратное риманово произведение прямой R.

Задача 13. Показать, что риманова связность риманового произведения римановых многообразий является аффинным произведением римановых связностей этих многообразий (см. задачу 6.22).

6. *Плоские торы.* d-кратное риманово произведение окружности S^1 на себя называется *плоским d-мерным тором* T^d. Окружности S^1 разного радиуса обычно не различаются, так что, вообще говоря, не все радиусы тора одинаковы.

Задача 14. Показать, что плоский d-мерный тор T^d является плоским многообразием.

7. *Накрывающие многообразия.* Пусть $i: N\to M$ — накрывающее отображение, и M — риманово многообразие; тогда i можно рассматривать как погружение, и если N наделено индуцированной римановой метрикой, то (i, N) называется *римановым накрытием многообразия* M. Например, односвязным римановым накрывающим пространством плоского тора служит R^d, так как это соотношение верно при $d=1$ и сохраняется для произведений.

Задача 15. Доказать последнее замечание, а именно, что если $i': N'\to M'$, $i'': N''\to M''$ — римановы накрытия, то риманово произведение $N'\times N''$ является римановым накрытием произведения $M'\times M''$ с накрывающим отображением $i'\times i''$.

Задача 16. Этот процесс можно обратить. Если i: $N \to M$ — накрывающее отображение и N снабжено римановой структурой, при которой преобразования листов являются изометриями, то на M имеется естественная индуцированная риманова структура, которая превращает (i, N) в риманово накрытие M. Например, вещественное проективное пространство P^d накрывается S^d и может быть наделено структурой, которая индуцируется римановой структурой S^d из примера 4.

8. *Параллелизуемые многообразия.* Если $X_1, \ldots, X_d$ — параллелизующие векторные поля на многообразии M, то $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$ (константы) определяют соответствующую риманову метрику на M. Частными случаями являются R^d и T^d. Вообще всякая группа Ли обладает такой метрикой.

Задача 17. Показать, что риманова связность этой метрики совпадает с прямой или противоположной связностями в том и только в том случае, если $[X_i, X_j] = 0$ для всех i, j.

Задача 18. Риманова связность параллелизации не имеет кручения (задача 6.5) тогда и только тогда, когда для всех постоянных линейных комбинаций X, Y параллелизующих полей выполнено равенство $\langle [X, Y], X \rangle = 0$, равносильное условию

$$\langle [X_i, X_j], X_k \rangle + \langle X_j, [X_i, X_k] \rangle = 0$$

при всех i, j, k. Доказать это с помощью следующей серии задач:

(а) Риманова связность и связность без кручения совпадают тогда и только тогда, когда геодезические римановой связности совпадают с геодезическими прямой связности (следствие теоремы 6.9).

(б) Пусть θ есть $O(d)$-значная форма на M, полученная снесением формы римановой связности с помощью естественного сечения параллелизации, и ρ — параллелизующая форма. Показать, что обе связности совпадают в том и только в том случае, если $\theta(t)\rho(t) = 0$ для каждого $t \in T(M)$. (Воспользоваться теоремой 6.9, заметив, что θ является формой разности, снесенной на M.)

(в) С помощью структурного уравнения $d\rho = -\theta\rho$ и косой-симметрии θ доказать желаемый результат. (Указание: $\langle\rho([X, Y]), \rho(X)\rangle = \langle[X, Y], X\rangle$.)

Отметим, что аффинная связность параллелизует $B(M)$, а, следовательно, и риманову структуру; то же происходит с римановой связностью на $F(M)$. Показать, что в последнем случае горизонтальные геодезические в $F(M)$ совпадают с подъемами геодезических в M, а вертикальные геодезические оказываются интегральными кривыми фундаментальных векторных полей F_{ij}. Однако интегральные кривые постоянных линейных комбинаций фундаментальных и базисных векторных полей в общем случае не являются геодезическими.

9. *Гомометрии.* Пусть $f: N \to M$ — диффеоморфизм римановых многообразий; тогда f называется *гомометрией* (с множителем растяжения a), если при любых $s, t \in N_n$ (n любое) $\langle df(s), df(t)\rangle = a^2\langle s, t\rangle$. Если f — тождественное преобразование на многообразии, то по данной римановой метрике на M (или N) эта формула определяет другую метрику, и тогда f — гомометрия.

Мы уже отмечали, что S^1 может иметь различные радиусы; окружности разного радиуса гомометричны друг другу.

Если $N = M$ как риманово многообразие, то в этом случае гомометриями могут быть только изометрии ($a = 1$). В самом деле, это так, когда M компактно (более общо — имеет конечный объем), поскольку гомометрия должна умножать объем на a^d. (Понятие объема определяется стандартным способом теории меры.)

Если же M имеет бесконечный объем, то оно вполне может допускать самогомометрии. Например, умножение на a является гомометрией пространства R^d.

Задача 19. Всякая гомометрия $f: M \to N$ распространяется до отображения $\bar{f}: B(M) \to B(N)$ ($\bar{f}(m, e_1, \ldots, e_d) = (f(m), df(e_1), \ldots, df(e_d))$), называемого *продолжением* f на $B(M)$, которое сохраняет риманову связность. В частности, умножение метрики на положительный скаляр не меняет римановой связности. Однако две метрики с одинаковой связностью не обязательно отличаются только множителем, в чем можно убедиться, рассматривая римановы произведения.

10. *Конформные отображения.* Если в примере 9 коэффициент a считать положительной C^∞-функцией от n, то получается *конформное отображение*

$$f\colon N \to M,\ \langle df(s),\ df(t)\rangle = (a(n))^2 \langle s,\ t\rangle,\qquad s, t \in N_n.$$

Дробнолинейные преобразования сферы Римана в теории функций комплексного переменного являются конформными преобразованиями римановой 2-сферы, а гомометрии R^d в комбинации со стереографической проекцией дают конформные отображения римановой d-сферы.

Задача 20. Доказать, что стереографическая проекция является конформным отображением $S^d—\{pt\}$ на R^d.

11. *Действие компактных групп.* Если G — компактная группа Ли, то G обладает единственной мерой (Хаара), инвариантной относительно левых и правых сдвигов, причем мера всего пространства G равна 1. Если G действует гладко на M, то при некоторой метрике на M элементы группы G являются изометриями. Действительно, пусть $\langle\ ,\ \rangle$ — произвольная риманова метрика на M, и для $s,\ t \in M_m$ положим

$$\langle s,\ t\rangle' = \int_{g\in G} \langle dg(s),\ dg(t)\rangle.$$

Задача 21. Доказать, что элементы G действуют как изометрии на $(M,\ \langle\ ,\ \rangle')$. Пусть f — произвольная самоизометрия на $(M,\ \langle\ ,\ \rangle)$, коммутирующая с действием G, т. е. $fg = gf$ для каждого $g \in G$; показать, что f — изометрия на $(M,\ \langle\ ,\ \rangle')$.

Задача 22. Показать, что ортогональные дополнения вертикальных касательных пространств относительно правоинвариантной метрики на главном расслоении образуют распределение связности. Получить отсюда новое доказательство того, что паракомпактное главное расслоение допускает связность (см. § 5.4).

Задача 23. (а) Показать, что левоинвариантная метрика на группе Ли G соответствует скалярному произведению на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

(б) Левоинвариантная метрика на G является правоинвариантной (и, следовательно, присоединенной инвариантной) в том и только в том случае, если соответствующее скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$ на $\mathfrak{g}$ *инвариантно*; это значит, что если $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, то

$$\langle [X, Y], Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle = 0,$$

т. е. $\operatorname{ad} X$ кососимметрично. (Это всего лишь иное выражение того факта, что функция $\langle \operatorname{Ad} e^{tX}Y, \operatorname{Ad} e^{tX}Z\rangle$ постоянна тогда и только тогда, когда ее производная равна нулю. Ср. с задачей 2.5.)

(в) Если группа G компактна, то она допускает такую метрику.

(г) Римановы связности этих инвариантных метрик на G совпадают со связностью без кручения из задачи 6.6 и, следовательно, полны (см. задачу 18).

(д) *Форма Киллинга* группы Ли G — это билинейная форма $k(\ ,\ )$ на $\mathfrak{g}$, определенная следующим образом: если $X, Y \in \mathfrak{g}$, то

$$k(X, Y) = \operatorname{tr}(ad\ X \circ ad\ Y).$$

Форма $k(\ ,\ )$ обладает свойством инвариантности (б), но не всегда является определенной или даже невырожденной, например если $\mathfrak{g}$ имеет нетривиальный центр.

12. *Римановы однородные пространства.* Если на M действует транзитивная группа Ли изометрий, то M является *римановым однородным пространством.* Пример 11 показывает, что однородное пространство компактной группы Ли можно снабдить однородной метрикой.

Задача 24. Пусть H — замкнутая редуктивная подгруппа группы Ли G (см. задачу 5.5), так что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, причем $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. Предположим, что $\mathfrak{m}$ допускает скалярное произведение, инвариантное относительно $\operatorname{Ad} H$. Показать, что G/H является римановым однородным пространством.

Многообразие Штифеля $V_{d,r}$ упорядоченных множеств r ортонормальных векторов в R^d является римановым однородным пространством как группы $O(d)$, так и группы $SO(d)$, а именно:

$$V_{d,r} = O(d)/O'(d-r) = SO(d)/SO'(d-r),$$

где $O'(d-r)$ и $SO'(d-r)$ действуют на последние $d-r$ компонент в R^d. Если положить $O(0) = SO(0) = \{1\}$, то частными случаями будут $O(d) = V_{d,d}$, $SO(d) = V_{d,d-1}$ и $S^{d-1} = V_{d,1}$.

13. *Многообразия флагов.* Если $d_1, \ldots, d_n$ — разбиение числа d, то можно определить многообразие флагов $Fl(d;\ d_1, \ldots, d_n)$ как множество n-наборов $(V_1, \ldots, V_n)$, где V_i — подпространство в R^d размерности d_i, причем эти подпространства взаимно ортогональны. Другой подход: $Fl(d;\ d_1, \ldots, d_n)$ можно рассматривать как множество возрастающих последовательностей

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_{n-1} \subset W_n = R^d$$

подпространств в R^d, где $d_i = \dim W_i - \dim W_{i-1}$.

Задача 25. (а) Установить взаимно однозначное соответствие между двумя этими множествами.

(б) Ортогональная группа $O(d)$ действует на n-наборы $(V_1, \ldots, V_n)$, а общая линейная группа $Gl(d, R)$ — на возрастающие последовательности $W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_{n-1} \subset W_n = R^d$. Найти группу изотропии в каждом случае, снабдив тем самым $Fl(d;\ d_1, \ldots, d_n)$ структурой однородного пространства двумя разными способами.

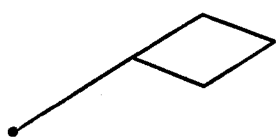

Рис. 27.

(в) Так как $O(d)$ компактно, то на $Fl(d;\ d_1, \ldots, d_n)$ имеется риманова метрика, при которой элементы $O(d)$ действуют транзитивно и изометрически. При $p = (V_1, \ldots$ $\ldots, V_n) \in Fl(d;\ d_1, \ldots, d_n)$ и $1 \leqslant i < j \leqslant n$ определим

m_{ij} как подпространство в $Fl(d;\ d_1,\ \ldots,\ d_n)_p$, натянутое на касательные к кривым, вдоль которых изменяются только V_i и V_j. Используя инвариантность присоединенного представления алгебры изотропии, показать, что эти подпространства m_{ij} взаимно ортогональны.

14. *Римановы симметрические пространства* [12, 25, 80]. Если риманово многообразие M для каждой своей точки m допускает изометрию f_m, при которой m неподвижно, а $df_m|_{M_m} = -1$ (f_m называется *симметрией в* m), то M является *римановым симметрическим пространством.*

Так как при изометрии геодезические переходят в геодезические, то, последовательно применяя симметрии в точках, расположенных вдоль геодезической, легко видеть, что геодезические неограниченно продолжаемы, откуда M — полное многообразие. Если M связно, то, любые две его точки можно соединить ломаной геодезической (см. задачу 8), а тогда композиция симметрий в серединах этих геодезических сегментов оказывается изометрией, преобразующей один конец ломаной в другой. Таким образом, группа изометрий транзитивна, а так как эта группа всегда является группой Ли, то M — риманово однородное пространство [33].

Риманова сфера S^d — симметрическое пространство.

Задача 26. Доказать, что в римановом симметрическом пространстве всякая C^∞-кривая, инвариантная относительно симметрии в каждой своей точке, является репараметризованной геодезической (ср. с задачей 12).

Задача 27. Риманово однородное пространство, симметричное относительно какой-нибудь своей точки, является римановым симметрическим пространством.

Задача 28. *Другое определение римановых симметрических пространств.* Пусть M — риманово однородное пространство, $M = G/H$. Тогда M является *однородным римановым симметрическим пространством*, если G допускает автоморфизм f с такими свойствами:

(I) f^2 — тождественное преобразование.

(II) Точки H неподвижны относительно f, и H содержит наибольшую связную подгруппу, точки которой неподвижны относительно f.

(а) Пусть π: $G\to M$ — каноническая проекция; определим отображение f_0: $M\to M$ равенством $f_0(\pi(g))=\pi(f(g))$. Показать, что определение f_0 корректно и что $df_0=-1$ на M_0, где $0=\pi(e)$.

(б) Используя формулу $f_0\circ L_g=L_{f(g)}\circ f_0$, где L_g обозначает левое действие G на M, и изометричность L_g, показать, что f_0 — изометрия. Вывести отсюда, что всякое однородное риманово симметрическое пространство является римановым симметрическим пространством.

(в) Пусть M — связное риманово симметрическое пространство. Мы видели, что M является римановым однородным пространством, $M=G/H$, где $H=\{g\in G\,|\,g(m)=m\}$, m — фиксированная точка в M. Определим f: $G\to G$ равенством $f(g)=f_m g f_m^{-1}$. Показать, что f удовлетворяет условиям (I) и (II) для однородного риманова симметрического пространства (см. задачу 8).

Задача 29. Пусть G — группа Ли с двусторонней инвариантной метрикой. Показать, что обратное отображение ψ: $G\to G$, определенное как $\psi(g)=g^{-1}$, является изометрией; вывести отсюда, что G — риманово симметрическое пространство.

Можно представить G также как однородное риманово пространство группы $G\times G$ с автоморфизмом f вида $f(g,h)=(h,g)$. Найти группу изотропии и отождествить G с однородным пространством. Описать, в частности, действие $G\times G$ на G.

Задача 30. *Грассмановы многообразия.* Грассманово многообразие $G_{d,r}$ r-плоскостей в R^d является римановым однородным пространством группы $O(d)$, а именно:

$$G_{d,r}=\frac{O(d)}{O(r)\times O'(d-r)},$$

где $O(r)$ действует на первые r, а $O'(d-r)$ на последние $d-r$ компонент в R^d. Пусть $g\in O(d)$, тогда

$$g=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix},$$

где A есть $r \times r$-матрица, D есть $(d-r)\times(d-r)$-матрица. Определим f формулой

$$f(g)=\begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}.$$

Доказать, что f определяет $G_{d,r}$ как однородное риманово симметрическое пространство.

Грассманово многообразие ориентированных r-плоскостей в R^d

$$\tilde{G}_{d,r}=\frac{SO(d)}{SO(r)\times SO'(d-r)}$$

является двулистным накрытием многообразия $G_{d,r}$, а также симметрическим пространством.

Задача 31. Пусть M и N — римановы симметрические пространства, i: $P \to M$ — накрывающее отображение. Показать, что $M \times N$ и P с индуцированными римановыми структурами являются римановыми симметрическими пространствами.

Задача 32. *Линзовые пространства.* Рассмотрим преобразование

$$(z_1, z_2) \to (z_1 \exp 2\pi i/p,\ z_2 \exp 2\pi i q/p)$$

на

$$S^3=\{(z_1, z_2)\,|\,z_i \in C,\ |z_1|^2+|z_2|^2=1\},$$

где p и q — взаимно простые целые числа. Оно порождает дискретную группу изометрий на S^3, которую можно рассматривать как группу преобразований листов некоторого многообразия M, накрытого S^3. Многообразие M называется линзовым пространством и имеет метрику, индуцированную метрикой S^3. Показать, что M не является римановым симметрическим пространством, хотя его накрывающее таковым является.

Замечание. Отметим, что если, не требуя связности, предположить изометричность компонент риманова симметрического пространства M, то M по-прежнему будет однородным, так что в этом случае оба понятия эквивалентны. Нетрудно придумать примеры римановых многообразий, компоненты которых не изометричны, но которые все же допускают симметрии f_m, однако эти примеры довольно искусственны, и мы не будем принимать их во внимание.

15. *Комплексные проективные пространства.* Пусть S^{2d+1} — риманова сфера радиуса r. В главном расслоении (S^{2d+1}, S^1, CP^d) (задача 3.12) S^1 действует как группа изометрий, откуда касательные подпространства, нормальные к вертикальным в точках S^{2d+1}, определяют связность H на главном расслоении S^{2d+1} (задача 22). Если считать $d\pi|_{H_s}$ изометрией между $CP^d_{\pi(s)}$ и H_s, то этим определяется риманова метрика на CP^d. Послойные изометрии на S^{2d+1} (среди них все унитарные преобразования C^{d+1}, суженные на S^{2d+1}) образуют транзитивную группу изометрий на CP^d, откуда CP^d — риманово однородное пространство. Более тщательное изучение этих послойных отображений показывает, что CP^d является также и симметрическим пространством.

16. *Комплексные многообразия* [15, 16, 93]. Пусть M — комплексное многообразие комплексной размерности d (см. задачи 1.7 и 3.10); M называется *эрмитовым многообразием*, если каждому $m \in M$ отнесена положительно определенная эрмитова билинейная форма $\langle\,,\rangle$ на $\mathcal{H}_m$, и это соответствие принадлежит C^∞ в том смысле, что если $z_1, \ldots, z_d$ — комплексная координатная система в m, то функции $g_{ij} = \langle \partial/\partial z_i, \partial/\partial z_j \rangle$ являются комплексными C^∞-функциями, т. е. $g_{ij} \in \mathcal{F}$. Нельзя требовать голоморфности формы $\langle\,,\rangle$, поскольку $g_{ij} = \bar{g}_{ji}$.

Задача 33. Так как M комплексно, то его расслоение базисов $B(M)$ приводится к расслоению $CB(M)$ с группой $GL(d, C)$; $CB(M)$ можно рассматривать как расслоение голоморфных базисов голоморфных касательных пространств $\mathcal{H}_m$ многообразия M. Показать, что существование эрмитовой структуры на M эквивалентно приводимости $CB(M)$ к расслоению $CF(M)$ с группой $U(d) \subset GL(d, C)$. Так или другим способом показать, что эрмитова структура всегда существует. Показать, что $CF(M)$ можно реализовать как расслоение голоморфных базисов, ортонормальных относительно данных эрмитовых форм.

Задача 34. Установить, что $\langle\,,\rangle$ можно однозначно продолжить до положительно определенной эрмитовой формы на $\mathcal{T}_m$, причем $\langle s, t\rangle = \langle\overline{\bar{s}, \bar{t}}\rangle$, если $s, t \in \mathcal{H}_m$ и $\langle \mathcal{H}_m, \overline{\mathcal{H}}_m\rangle = 0$.

Задача 35. Показать, что если $s, t \in \mathcal{M}_m$, то

$$\langle s, t\rangle = 2R\langle Ps, Pt\rangle = \frac{1}{2} R\langle \tilde{s}, \tilde{t}\rangle,$$

где $\tilde{s} = s - iJs$, $\tilde{t} = t - iJt$ и R — «вещественная часть».

Этим определяется риманова структура на подлежащем вещественном многообразии эрмитова многообразия M, и потому $F(M)$ определено и обладает римановой связностью. Действительно, $F(M)$ определяется метрикой $\langle\,,\rangle' = 2\langle\,,\rangle$.

Показать, что J является полем ортогональных преобразований относительно этого симметричного скалярного произведения.

Задача 36. Так как $\mathcal{T}_m = \mathcal{M}_m + i\mathcal{M}_m$, то всякое $t \in \mathcal{H}_m$ можно разложить как $t = Rt + iIt$, где $Rt, It \in \mathcal{M}_m$. Показать, что $\langle Rt, It\rangle = 0$ и потому отображение

$$i\colon CF(M) \to F(M),$$

заданное равенством $i(m, t_1, \ldots, t_d) = (m, Rt_1 \ldots, Rt_d, It_1, \ldots, It_d)$, корректно определяет вложение вещественного многообразия $CF(M)$, совместимое с ранее определенным включением $CB(M)$ в $B(M)$. Мы будем писать $CF(M)$ вместо $i(CF(M))$.

Следующая задача показывает, что риманова связность на $F(M)$ в общем случае не приводима к некоторой связности на $CF(M)$.

Задача 37. Следующие предложения эквивалентны:

(а) Данная риманова связность на $F(M)$ приводима к связности на $CF(M)$, т. е. если $b \in CF(M)$, то H_b — касательное пространство к $CF(M)$, (б) Параллельный перенос голоморфной касательной является голоморфной касательной.

(в) Параллельный перенос коммутирует с проекцией P (см. стр. 69).

(г) Параллельный перенос коммутирует с J.

(д) Ковариантные производные J равны нулю.

(е) Если X, Y — векторные поля на M, то $\nabla_X(JY) = J\nabla_X(Y)$.

Задача 38. Для $s, t \in \mathcal{M}_m$ определим $\Omega(s, t) = -\langle Js, t\rangle$. Показать, что Ω — дифференциальная 2-форма на M и

$$\Omega(s, t) = 2I\langle Ps, Pt\rangle = \frac{1}{2} I\langle \tilde{s}, \tilde{t}\rangle.$$

Говорят, что M — *кэлерово многообразие*, если $d\Omega = 0$. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

(а) $d\Omega = 0$.

(б) Все ковариантные производные Ω равны нулю.

(в) $\nabla_X(JY) = J\nabla_X(Y)$, здесь X, Y — векторные поля. [*Указание*: проверить следующие импликации:

$$(\text{а}) \Rightarrow (\text{в}) \Rightarrow (\text{б}) \Rightarrow (\text{а}).$$

Вспомнить задачи 6.13, 6.14 и определение внешней производной с помощью векторных полей.]

Задача 39. В этой задаче дается набросок прямого доказательства того факта, что кэлеровость M равносильна приводимости римановой связности на $F(M)$ к $CF(M)$.

Пусть φ_{ij}, ω_k — компоненты связности и формы смещения на $F(M)$. Пусть $\tilde{\Omega} = \Omega \circ d\pi$. Определим поле линейных преобразований $\tilde{J}$ на $F(M)$, положив $\tilde{J}|_{V_b} = 1$ и $\tilde{J}|_{H_b} = (d\pi|_{H_b})^{-1} \circ J \circ d\pi$. Доказать следующее:

(а) $d\tilde{\Omega} = 0$ тогда и только тогда, когда $d\Omega = 0$.

(б) Вертикальное касательное пространство к $CF(M)$ порождается векторными полями $F^{i, j} + F^{i+d, j+d}$ и $F^{i, j+d} - F^{i+d, j}$.

На $CF(M)$ имеем

(в) $\omega_i \circ \tilde{J} = -\omega_{i+d}, \ \omega_{i+d} \circ \tilde{J} = \omega_i \quad (1 \leqslant i \leqslant d)$.

(г) $$\tilde{\Omega} = 2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant d} \omega_i \omega_{i+d}.$$

(д) $$\frac{1}{2} d\tilde{\Omega} = \sum_{i,\ j \leqslant d} (\omega_{ij} - \omega_{i+d,\ j+d}) \omega_i \omega_{j+d} + \\ + \sum_{i < j \leqslant d} (\omega_{i+d,\ j} + \omega_{i,\ j+d})(\omega_{i+d}\omega_{j+d} + \omega_i \omega_j).$$

(е) Утверждение, что если t — касательная к $CF(M)$, то Vt — касательная к $CF(M)$, равносильно равенству $d\tilde{\Omega} = 0$.

Задача 40. Показать, что Ω — форма типа (1.1) и что $\Omega^d \neq 0$. Кроме того, если M компактно и кэлерово, то форма Ω^p не точна ни при каком $p \leqslant d$. (Форма θ называется *точной*, если существует форма ψ, такая, что $d\psi = \theta$.)

Задача 41. Пусть $\langle\, ,\rangle$ — риманова форма на комплексном многообразии, относительно которой J ортогонально. Построить эрмитову форму на M, из которой данная риманова форма получается так же, как в задаче 35.

Задача 42. Показать, что (комплексное) подмногообразие кэлерова многообразия также является кэлеровым.

Задача 43. *Комплексное проективное пространство.* Пусть $t_0, \ldots, t_d$ — однородные комплексные координатные функции на CP^d. Тогда можно взять следующую базу координатных систем. Пусть

$$U_i = \{p \in CP^d \mid t_i(p) \neq 0\}, \quad i = 0, \ldots, d,$$

а координатные функции φ_i: $U_i \to C^d$ определяются равенствами

$$z_j^i = z_j \circ \varphi_i = t_j / t_i.$$

Тогда эти φ_i определяют комплексную структуру на CP^d. На каждом U_i возьмем функцию $f_i = \sum_{j=0}^{d} z_j^i \bar{z}_j^i$. Заметим, что на $U_i \cap U_k$

$$f_k = f_i z_i^k \bar{z}_i^k.$$

Воспользовавшись этим, показать, что на CP^d существует вещественная замкнутая форма Ω типа (1,1), такая, что на U_j

$$\Omega = -id'd''f_j \qquad \text{(задача 4.28)}.$$

Показать, что симметричная форма, ассоциированная с Ω, положительно определена и превращает J в ортогональное преобразование. Вывести отсюда, что CP^d — кэлерово многообразие относительно соответствующей эрмитовой структуры.

Следствием двух предыдущих задач является кэлеровость всякого неособенного проективного многообразия [1]).

[1]) Неособенным проективным многообразием называется комплексное подмногообразие проективного пространства. — *Прим. перев.*