ГЛАВА 8

Геодезические и полные римановы многообразия

В первом параграфе с помощью леммы Гаусса устанавливается свойство локального минимума для геодезических, во втором — доказывается теорема Хопфа — Ринова о полных римановых многообразиях. В частности, показывается, что в случае полного многообразия геодезические реализуют глобальные расстояния. Кроме того, рассматривается длина непрерывной кривой [22, 33, 80, 94].

8.1. Геодезические

В § 6.3 для произвольных $m \in M$, $b = (m, e_1, \ldots, e_d) \in B(M)$ мы определили отображения $\exp_m \colon M_m \to M$, $\exp_b \colon M_m \to B(M)$, зависящие от связности на $B(M)$, причем $\exp_b$ — достаточно естественное поднятие отображения $\exp_m$. Мы обратили внимание на то, что, вообще говоря, эти отображения определены только на некоторой окрестности начала в M_m, где они принадлежат C^∞, причем $\exp_m$ является диффеоморфизмом, быть может, меньшей окрестности начала. Для того чтобы эти отображения были определены в целом, нужно предположить, что геодезические, которые выходят из m, неограниченно продолжаемы.

Итак, пусть M — риманово многообразие; тогда отображение $\exp_b$ получается следующим образом:

Пусть $b = (m, f_1, \ldots, f_d) \in F(M)$, φ — риманова связность на $F(M)$, $p = \sum p_i f_i \in M_m$ и $\bar{\sigma}$ — единственная интегральная кривая поля $\sum p_i E_i$, причем $\bar{\sigma}(0) = b$. Тогда $\exp_b(p) = \bar{\sigma}(1)$.

Векторное поле E_i — это сужение на $F(M)$ векторного поля, определенного на $B(M)$ (п. 6.1.2). Отображение $\overline{\exp_b}$ принадлежит C^∞ и фактически является радиально горизонтальным поднятием в $F(M)$ отображения $\exp_m$. В частности, образ M_m при $\overline{\exp_b}$ содержится в $F(M)$.

Пусть Φ — форма кривизны данной римановой связности, ω — форма смещения на $F(M)$, определенная в § 7.3. Рассмотрим формы θ, Θ, ψ на M_m:

$$\theta = \overline{\exp_b}^* \varphi,$$
$$\Theta = \overline{\exp_b}^* \Phi,$$
$$\psi = \overline{\exp_b}^* \omega,$$

тем самым определяются соответственно вещественные формы θ_{ij}, Θ_{ij}, ψ_{ij}. Структурные уравнения принимают вид

$$d\psi = -\theta\psi,$$
$$d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta] + \Theta.$$

(В терминах компонент

$$d\psi_i = \sum_{k=1}^{d} \theta_{ki}\psi_k,$$
$$d\theta_{ij} = -\sum_{k=1}^{d} \theta_{ik}\theta_{kj} + \theta_{ij}.)$$

Пусть $p \in M_m$, ρ — луч из m в p, $\sigma = \exp_m \circ \rho$, $\overline{\exp_b}\, p = (m, f_1', \ldots, f_d')$ (таким образом, f_i' — параллельный перенос вектора f_i вдоль σ). Тогда если $s, t \in (M_m)_p$, то

(а) $d \exp_m s = \sum \psi_i(s) f_i'$,

(б) $\begin{cases} \langle d \exp_m s,\ d \exp_m t\rangle = \langle \psi(s), \psi(t)\rangle = \sum \psi_i(s)\psi_i(t), \\ \| d \exp_m s \|^2 = \| \psi(s) \|^2 = \sum \psi_i(s)^2. \end{cases}$

[(б) — непосредственное следствие формулы (а), которая в свою очередь легко вытекает из определения ψ.]

Итак, если $x_1, \ldots, x_d$ — базис, сопряженный к f_i, $s = \sum s_i D_{x_i}(p)$, то $\psi_i(s) - s_i$ выражает различие параллельных переносов в M и M_m.

Если $p = \sum p_i f_i \in M_m$, $s = c \sum p_i D_{x_i}(p) \in (M_m)_p$, т. е. s — касательная к лучу ρ, о котором мы говорили выше, то

(в) $$\psi_i(s) = cp_i,$$

(г) $$\theta(s) = 0.$$

Это показывает, что длины радиальных векторов сохраняются при отображении $d\exp_m$ и что касательные к горизонтальным кривым в $F(M)$ являются горизонтальными касательными.

C^∞-прямоугольником в M называется отображение Q прямоугольника $[a, b] \times [c, d] \subset R^2$ в M, которое может быть продолжено до C^∞-отображения некоторой окрестности этого прямоугольника. $Q(a, c)$ — *начальная вершина* прямоугольника Q, тогда как его *база* — это кривая τ вида $Q \circ j_c$, где $j_c(t) = (t, c)$. Вообще кривые

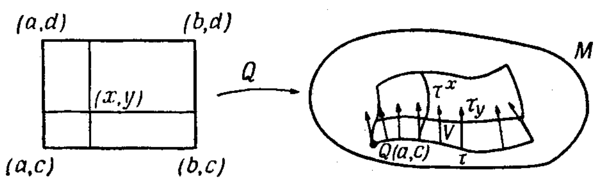

Рис. 28.

$\tau_y = Q \circ j_y$ называются *продольными*, а кривые $\tau^x = Q \circ {}'j_x$ (${}'j_x(t) = (x, t)$) *трансверсальными*. «Векторное поле» V, определенное вдоль базы τ равенством $V(s) = \tau^s_*(c)$, называется *ассоциированным векторным полем* прямоугольника Q (на самом деле это кривая в касательном расслоении многообразия M), а Q — *ассоциированным прямоугольником* поля V.

Каноническое поднятие. Пусть Q есть C^∞-прямоугольник в римановом многообразии M и $F(M)$ имеет риманову связность φ; тогда для каждого $f \in \pi^{-1}(Q(a, c))$

найдется единственный C^∞-прямоугольник $\bar{Q}$ в $F(M)$ с начальной вершиной f, такой, что

(а) $Q = \pi \circ \bar{Q}$, т. е. $\bar{Q}$ есть поднятие Q,

(б) $\varphi(\bar{Q} \circ j_{y*}) = 0$, т. е. продольные кривые прямоугольника $\bar{Q}$ горизонтальны, и

(в) $\varphi(\bar{Q} \circ {}'j_{a*}) = 0$, т. е. начальная трансверсальная кривая горизонтальна.

Задача 1. Доказать существование, единственность и гладкость канонического поднятия C^∞-прямоугольника.

Теорема 1. *(Лемма Гаусса.)* Пусть Q есть C^∞-прямоугольник в M, Q: $[a, b] \times [c, d] \to M$, продольные кривые которого являются геодезическими, причем касательные к этим геодезическим имеют одинаковую длину. Тогда если V — ассоциированное векторное поле, то функция $\langle \tau_{c*}, V \rangle$ является константой. В частности, если $\tau_{c*}(a) \perp V(a)$, то $\tau_{c*}(t) \perp V(t)$ при любом $t \in [a, b]$.

Доказательство. Пусть $\bar{Q}$ — каноническое поднятие через $f \in F(M)$ прямоугольника Q. Введем следующие обозначения: $\varphi^Q = \bar{Q}^* \varphi$, $\omega^Q = \bar{Q}^* \omega$. Первое структурное уравнение принимает вид $d\omega^Q = -\varphi^Q \omega^Q$, что после применения к (D_1, D_2) дает

$$D_1 \omega^Q (D_2) - D_2 \omega^Q (D_1) - \omega^Q ([D_1, D_2]) = \\ = -\varphi^Q (D_1) \omega^Q (D_2) + \varphi^Q (D_2) \omega^Q (D_1).$$

Но $[D_1, D_2] = 0$ и $\varphi^Q (D_1) = 0$, так как продольные кривые поля $\bar{Q}$ горизонтальны; поэтому, скалярно умножив на $\omega^Q (D_1)$, получим

$$\langle D_1 \omega^Q (D_2), \omega^Q (D_1) \rangle - \langle D_2 \omega^Q (D_1), \omega^Q (D_1) \rangle = \\ = \langle \varphi^Q (D_2) \omega^Q (D_1), \omega^Q (D_1) \rangle = 0,$$

поскольку $\varphi^Q (D_2)$ кососимметрично.

Далее, $\omega^Q (D_1) \circ j_y$ — константа, так как кривая τ_y геодезическая, поэтому

$$D_1 \langle \omega^Q (D_2), \omega^Q (D_1) \rangle = \langle D_1 \omega^Q (D_2), \omega^Q (D_1) \rangle;$$

кроме того,

$$D_2\langle\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle=2\langle D_2\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle.$$

Но $\langle\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle$ — константа, ибо мы предположили, что касательные к продольным кривым имеют одну и ту же длину, отсюда

$$D_2\langle\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle=0.$$

Следовательно, вышеуказанное равенство принимает вид $D_1\langle\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle=0$. Однако очевидно, что вдоль базовой кривой $\langle\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle=\langle V,\ \tau_{c*}\rangle$. Ч. Т. Д.

Следствие. Пусть $p\in M_m$, ρ — луч из 0 в p, $\sigma=\exp_m\circ\rho$ и $s\in(M_m)_p$. Тогда $s\perp\rho$ (в евклидовом скалярном произведении) влечет $d\exp_m s\perp\sigma$.

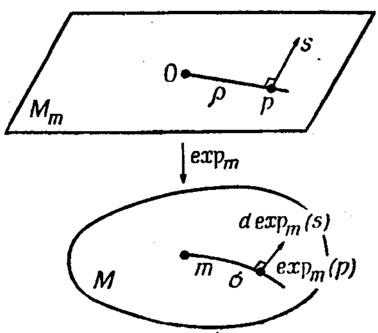

Рис. 29.

Это доказывается применением леммы Гаусса к прямоугольнику Q, начальная трансверсаль которого является вырожденной кривой $m\in M$, а продольные кривые являются образами при отображении $\exp_m$ лучей, исходящих из 0 в M_m. В частности, базой служит σ. Точное построение предоставляется читателю. (Этот прямоугольник можно назвать «куском пирога».)

Следующий результат выражает тот факт, что локально минимум длины ломаных C^∞-кривых достигается на геодезических.

Теорема 2. Пусть $B \subset M_m$ — шар с центром 0, на котором $\exp_m$ является диффеоморфизмом. Пусть $p \in B$, ρ — луч из 0 в p, $\sigma = \exp_m \circ \rho$, τ — произвольная ломаная C^∞-кривая из m в $\exp_m p$ в многообразии M. Тогда $|\tau| \geqslant |\sigma|$, причем равенство достигается только, когда τ — ломаная C^∞-репараметризованная геодезическая σ.

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_d$ — сопряженный базис к $f_1, \ldots, f_d$ в M_m. Определим следующие объекты на B и $B' = \exp_m B$:

$$r = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}, \quad \bar{r} = r \circ \exp_m^{-1},$$

$$T = \sum \frac{x_i D_{x_i}}{r}, \text{ радиальное единичное векторное поле на } B - \{0\}.$$

$$\bar{T} = d \exp_m T \circ \exp_m^{-1}, \text{ определенное на } B' - \{m\}.$$

Если $q \in M_m$, $s \in (M_m)_q$, то $s = s_T + s_N$, где s_T кратно $T(q)$, а $s_N \perp T(q)$. Взяв $t \in M_b$, $b \in B'$, запишем аналогично $t = t_T + t_N$, где t_T кратно $\bar{T}(b)$, а $t_N \perp \bar{T}(b)$. Имеем $d \exp_m s = d \exp_m s_T + d \exp_m s_N$, и из следствия теоремы 1 $d \exp_m s_N \perp d \exp_m s_T$. Следовательно,

(I) $d \exp_m s_T = (d \exp_m s)_T$. Кроме того, из (б) стр. 185 вытекает, что

(II) $\| d \exp_m s_T \| = \| s_T \|$.

Пусть $[a, b]$ — интервал определения τ, c — наименьшее число из $[a, b]$, для которого $\bar{r}(\tau(c)) = r(p) = |\sigma|$. Определим теперь на $[a, c]$ кривую

$$\eta = \sigma \circ \frac{\bar{r}}{\| p \|} \circ \tau.$$

Замечая, что $\| \sigma_* \| = \| p \|$, имеем

$$\begin{aligned}
\eta_* = d\eta\left(\frac{d}{du}\right) &= d\sigma \circ \frac{dr}{\| p \|} \circ d \exp_m^{-1} \circ d\tau\left(\frac{d}{du}\right) = \\
&= \frac{1}{\| p \|} d\sigma \circ dr \circ d \exp_m^{-1}(\tau_*) = \\
&= \frac{1}{\| p \|} d\sigma\left(\| (d \exp_m^{-1} \tau_*)_T \| \frac{d}{du}\right) = \\
&= \frac{1}{\| p \|} \| (d \exp_m^{-1} \tau_*)_T \| \, \sigma_*;
\end{aligned}$$

отсюда на $[a, c]$

$$\|\eta_*\| = \|(d\exp_m^{-1}\tau_*)_T\| = \|d\exp_m(d\exp_m^{-1}\tau_*)_T\|, \text{ в силу (II)},$$
$$= \|\tau_{*T}\|, \text{ в силу (I)}.$$

Поэтому если $\tau' = \tau|_{[a, c]}$, то

$$|\tau| \geqslant |\tau'| \geqslant |\eta| \geqslant |\sigma|,$$

что и утверждалось. Если $|\tau| = |\sigma|$, то $\tau_*(u)$, очевидно,

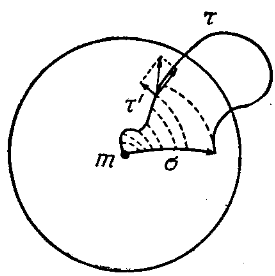

Рис. 30.

должно равняться нулю при $u > c$ и $\tau_{*N} = 0$, откуда вытекает, что образы τ и σ совпадают. Ч. Т. Д.

Следствие 1. Квадрат расстояния до m, $\rho(m, I)^2$, является C^∞-функцией на B'. (I — тождественное отображение на M.)

Доказательство. Он равен $\sum (x_i \circ \exp_m^{-1})^2$.

Следствие 2. Если через $B(m, c)$ обозначен шар радиуса c с центром в m, то $\exp_m(B(0, c)) = B(m, c)$, когда c меньше радиуса B.

Следствие 3. Если τ — ломаная C^∞-кривая из m в n, причем $|\tau| = \rho(m, n)$, то τ — ломаная C^∞-репараметризованная геодезическая.

Доказательство. τ минимизирует длину дуги от m до n, а потому локально минимизирует длину дуги, и в силу доказанной теоремы является ломаной C^∞-репараметризованной геодезической. Этого достаточно. Ч. Т. Д.

Лемма 1. Пусть $m \in M$, O — шар в M_m, на котором $\exp_m$ является диффеоморфизмом $O \to U$, и пусть γ: $(a, b) \to U$ есть C^∞-кривая в U. Предположим, что для $r = \rho(m, \gamma)$ при некотором значении аргумента t имеет место равенство $r'(t) = 0$. Тогда геодезическая в U из m в $\gamma(t)$ перпендикулярна к $\gamma_*(t)$ в точке $\gamma(t)$.

Доказательство. Это сразу же следует из леммы Гаусса, примененной к поднятию кривых в M_m, и аналогичного факта в евклидовом пространстве.

Теорема 3. Пусть N, P — подмногообразия в M, σ — геодезическая из $n \in N$ в $p \in P$, причем $|\sigma| = \rho(P, N)$. Тогда кривая σ перпендикулярна и к N, и к P.

Доказательство. Очевидно, что кусок σ минимизирует длину дуги от N или P до любой точки на σ. Для точек, достаточно близких к N или P, из леммы 1 следует, что σ перпендикулярна к кривым, идущим в N или P через n или p соответственно, и, значит, σ перпендикулярна и к N_n, и к P_p. Ч. Т. Д.

Пусть N — подмногообразие риманова многообразия M; определим $\perp(N)$, *нормальное расслоение* к N, следующим образом [см. § 3.3, п. (4)]:

$$\perp(N) = \{(n, t) \in T(M) \mid t \in M_n \text{ для некоторых } n \in N \text{ и } t \perp N_n\}.$$

Задача 2. Показать, что $\perp(N)$ — подмногообразие в $T(M)$ и что $\mathrm{Exp}|_{\perp(N)}$ невырожденно на тривиальном сечении в $\perp(N)$.

Трубчатая окрестность $\perp_r(N)$ радиуса r подмногообразия N в $\perp(N)$ — это открытое подмножество в $\perp(N)$, пересекающее каждый слой по открытому шару радиуса r с центром в начале слоя.

Теорема 4. Если N — компактное подмногообразие риманова многообразия M, то существует такое $r > 0$, что $\exp$ диффеоморфно на $\perp_r(N)$. В образе $\perp_r(N)$, называемом *трубчатой окрестностью* N в M, каждая точка соединима единственной геодезической с N, минимизирующей длину кривой до N.

Доказательство предоставляется в качестве упражнения.

Локальный вариант этой теоремы обеспечивает существование нормальных координат для N в следующем смысле.

Пусть $n \in N$. Координатная система в точке $n \in M$ *нормальна для* N, если точкам из N соответствуют точки некоторого линейного подпространства размерности, равной размерности N, а прямым, перпендикулярным этому подпространству, — геодезические, перпендикулярные к N.

Задача 3. Пусть i: $N \to M$ — погружение (т. е. di является изоморфизмом в каждой точке). Определить нормальное расслоение погружения и трубчатые окрестности в нем. Показать, что если N компактно, то Exp: $T(M) \to M$ порождает погружение $\perp_r(N)$ в M при некотором r. Привести пример неединственности минимизирующих геодезических, соединяющих точки погружения $\perp_r(N)$ с $i(N)$.

Задача 4. Рассмотреть плоский 2-мерный тор, полученный отождествлением противоположных сторон единичного квадрата в R^2, противоположными вершинами которого служат (0, 0) и (1, 1). Указать геометрическое место точек, удаленных на расстояние 2/3 от вершины. Как изменится это геометрическое место, если удалить из этого тора замкнутый прямолинейный сегмент от (1/4, 0) до (1/4, 1/2), получив некоторое неполное (см. ниже) многообразие?

Задача 5. Показать, что риманово накрывающее отображение не увеличивает расстояний.

8.2. Полные римановы многообразия

Пусть M — риманово многообразие: $E(m, t) = (m, \exp_m t)$ определяет отображение E: $T(M) \to M \times M$. Для того чтобы E было определено на всем $T(M)$, мы