соединима единственной геодезической с N, минимизирующей длину кривой до N.

Доказательство предоставляется в качестве упражнения.

Локальный вариант этой теоремы обеспечивает существование нормальных координат для N в следующем смысле.

Пусть $n \in N$. Координатная система в точке $n \in M$ *нормальна для* N, если точкам из N соответствуют точки некоторого линейного подпространства размерности, равной размерности N, а прямым, перпендикулярным этому подпространству, — геодезические, перпендикулярные к N.

Задача 3. Пусть i: $N \to M$ — погружение (т. е. di является изоморфизмом в каждой точке). Определить нормальное расслоение погружения и трубчатые окрестности в нем. Показать, что если N компактно, то Exp: $T(M) \to M$ порождает погружение $\perp_r(N)$ в M при некотором r. Привести пример неединственности минимизирующих геодезических, соединяющих точки погружения $\perp_r(N)$ с $i(N)$.

Задача 4. Рассмотреть плоский 2-мерный тор, полученный отождествлением противоположных сторон единичного квадрата в R^2, противоположными вершинами которого служат (0, 0) и (1, 1). Указать геометрическое место точек, удаленных на расстояние 2/3 от вершины. Как изменится это геометрическое место, если удалить из этого тора замкнутый прямолинейный сегмент от (1/4, 0) до (1/4, 1/2), получив некоторое неполное (см. ниже) многообразие?

Задача 5. Показать, что риманово накрывающее отображение не увеличивает расстояний.

8.2. Полные римановы многообразия

Пусть M — риманово многообразие: $E(m, t) = (m, \exp_m t)$ определяет отображение E: $T(M) \to M \times M$. Для того чтобы E было определено на всем $T(M)$, мы должны предположить, что все геодезические неограниченно продолжаемы. Во всяком случае, E определено на некоторой окрестности нулевого сечения в $T(M)$ и в действительности принадлежит там классу C^∞. Кроме того, справедлива

Лемма 2. При любом $m \in M$ отображение dE является изоморфизмом на $T(M)_{(m,\,0)}$, и потому по теореме об обратной функции E является диффеоморфизмом окрестности точки $(m, 0)$ на окрестность точки (m, m).

Доказательство. Достаточно проверить, что dE отображает $T(M)_{(m,\,0)}$ на $M \times M_{(m,\,m)}$, поскольку размерности совпадают. Пусть π_i: $M \times M \to M$ — проекция на i-й сомножитель, $i=1, 2$. Известно, что $E|_{\pi^{-1}(m)}$, заданное формулой $E|_{\pi^{-1}(m)}(m, t) = (m, \exp_m t)$, отображает $(M_m)_0$ на касательное пространство к $\pi_1^{-1}(m)$ в точке (m, m). А теперь остается доказать, что dE отображает касательные к нулевому сечению расслоения $T(M)$ на касательное пространство к диагонали произведения $M \times M$: этого достаточно, поскольку $M \times M_{(m,\,m)}$, очевидно, порождается касательными к $\pi_1^{-1}(m)$ и касательными к диагонали.

Пусть D: $M \to M \times M$ — диагональное отображение, $D(m) = (m, m)$. Тогда сужение E на нулевое сечение равно сужению $D \circ \pi$ на нулевое сечение. Отображение $d\pi$ является отображением «на», следовательно, dD есть отображение на касательное пространство к диагонали. Ч. Т. Д.

Лемма 3. Пусть C — произвольное компактное подмножество в M. Тогда существует такое $c > 0$, что для каждого $m \in C$ отображение $\exp_m$ определено на $B(O(m), c)$ и является там диффеоморфизмом на шар $B(m, c)$, где $O(m)$ — начало в M_m.

Доказательство. Прежде всего отметим, что если не все геодезические неограниченно продолжаемы, то $\exp_m$ можно определить лишь на окрестности точки $O(m)$. Однако из теории дифференциальных уравнений следует, что для каждого $m \in M$ $\exp_m$ определено на шаре, радиус которого — непрерывная функция от m, и, значит, можно взять такое c_1, что $\exp_m$ определено на $B(O(m), c_1)$ при любом $m \in C$. В силу следствия 2 теоремы 2, нужно лишь показать, что существует такое $c>0$, что при любом $m \in C$ отображение $\exp_m$ является диффеоморфизмом на шаре $B(O(m), c)$. В лемме 2 это фактически утверждается локально, откуда, в силу компактности, следует наш результат.

Все же сначала мы должны переформулировать лемму 2, точное утверждение которой таково: для каждого $m \in C$ существует окрестность P_m точки $(m, 0)$, которая диффеоморфно отображается на окрестность точки (m, m). Следовательно, для каждого $n \in \pi(P_m)$ отображение $d\exp_n$ регулярно (т. е. взаимно однозначное «на»), откуда $\exp_n$ является диффеоморфизмом на множестве $\{t \in M_n \mid (n, t) \in P_m\} = P_{m,n}$; поэтому достаточно показать, что существует $c_m>0$, такое, что шар $B(O(n), c_m)$ относительно римановой метрики содержится в $P_{m,n}$ для всех $n \in \pi(P_m)$.

Пользуясь тем, что $T(M)$ обладает структурой локального произведения с топологией слоя, заданной евклидовой метрикой, что риманова и евклидова метрики эквивалентны на каждом касательном пространстве (см. лемму 7.1) и что риманова метрика непрерывна, найдем, что P_m содержит окрестность вида

$$P'_m = \{(n, t) \mid n \in U_m, \ \|t\| < c_m\},$$

где U_m — окрестность точки m и $c_m>0$. Поэтому, при $n \in U_m$, $\exp_n$ отображает $B(O(n), c_m)$ диффеоморфно на $B(n, c_m)$. В силу компактности, C покрывается конечным числом U_m, каждому из которых соответствует некоторое c_m. Полагая $c = \min c_m$, получаем желаемый результат. Ч. Т. Д.

Отсюда следует, что квадрат функции расстояния ρ^2 есть функция класса C^∞ на окрестности точки (m, m) в $M \times M$.

Теорема 5 (Хопф — Ринов [15, 62, 87]). Для связного риманова многообразия M рассмотрим следующие условия:

(а) M — полное многообразие.

(б) Все ограниченные замкнутые подмножества компактны.

(в) Существует такая точка $m \in M$, что все геодезические, начинающиеся в m, неограниченно продолжаемы.

(г) Все геодезические неограниченно продолжаемы.

(д) Любые точки $m, n \in M$ можно соединить геодезической, длина которой равна $\rho(m, n)$.

Условия (а)—(г) эквивалентны, условие (д) вытекает из них.

Задача 6. Найти пример, когда из (д) не следует (а). Найти также пример, когда минимизирующая геодезическая между двумя точками не единственна: на самом деле их может быть бесконечно много.

Отметим, что (в) можно сформулировать так: «$\exp_m$ определено на всем M_m», а (г) так: «Риманова связность полна» (§ 6.3).

Доказательство. Для всякого метрического пространства условие (а) вытекает из условия (б). То что из (г) следует (в), тривиально, а то что из (а) вытекает (г), является следствием теоремы о продолжаемости решений дифференциальных уравнений (см. приложение).

Итак, нам остается только проверить, что из (в) следует (б), а из (б) вытекает (д).

Зафиксируем $m_0 \in M$ и определим при любом $r > 0$

$$\overline{B}_r = \{m \in M \mid \rho(m_0, m) \leqslant r\} = \overline{B(m_0, r)};$$

$$E_r = \{m \in \overline{B}_r \mid m \text{ можно соединить с } m_0 \text{ геодезической, длина которой равна } \rho(m, m_0)\}.$$

Предполагая условие (в) выполненным для m_0, достаточно доказать, что (1) E_r компактно и (2) $E_r = \overline{B}_r$. Поскольку всякое ограниченное множество содержится в некотором $\overline{B}_r$, то, в силу (1) и (2), замкнутое ограниченное множество компактно — это и есть условие (б); далее, поскольку из (б) вытекает (г), то вместо m_0 можно взять произвольное m, так что из (2) вытекает (д).

Доказательство утверждения (1). Пусть $\bar{E}_r = \{p \in M_{m_0} \mid \rho(m_0, \exp_{m_0} p) = \|p\| \leqslant r\}$; положим $f(p) = \rho(m_0, \exp_{m_0} p) - \|p\|$. Тогда

$$\bar{E}_r = f^{-1}(0) \cap \overline{B(O(m_0), r)};$$

это множество, очевидно, компактно, поскольку оно замкнуто и ограничено. Компактность E_r получается теперь из того, что $E_r = \exp_{m_0} \bar{E}_r$, и непрерывности $\exp_{m_0}$. Ч. Т. Д.

Для доказательства утверждения (2) потребуется

Лемма 4. Если $E_r = \bar{B}_r$ при некотором r и если $\rho(m_0, n) > r$, то существует m, такое, что $\rho(m_0, m) = r$ и $\rho(m_0, n) = r + \rho(m, n)$.

Доказательство. Для $k = 1, 2, \ldots$ возьмем ломаную C^∞-кривую σ_k из m_0 в n с $|\sigma_k| < \rho(m_0, n) + 1/k$ (это возможно, в силу определения ρ). Пусть m_k — последняя точка на σ_k в $\bar{B}_r$, так что $\rho(m_0, m_k) = r$. В силу

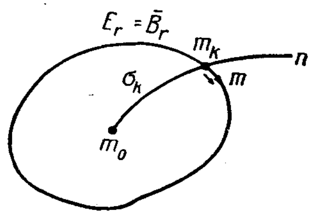

Рис. 31.

компактности $E_r = \bar{B}_r$, эти m_k имеют предельную точку m, и, переходя к подпоследовательности, мы можем предположить, что $\{m_k\}$ сходится к m. Далее,

$$\rho(m_0, n) \leqslant \rho(m_0, m) + \rho(m, n) = r + \rho(m, n).$$

С другой стороны, $\rho(m_0, n) > |\sigma_k| - 1/k = |$длина куска σ_k от m_0 до $m_k| + |$длина куска σ_k от m_k до $n| - 1/k \geqslant r + \rho(m_k, n) - 1/k$, что имеет пределом $r + \rho(m, n)$, откуда $\rho(m_0, n) \geqslant r + \rho(m, n)$, так что имеет место равенство. Тем самым лемма 4 доказана.

Докажем теперь утверждение (2), используя связность множества неотрицательных вещественных чисел; точнее, мы докажем, что

(I) $E_0 = \bar{B}_0$.

(II) $E_r = \bar{B}_r,\ r' < r,\ \Rightarrow E_{r'} = \bar{B}_{r'}$.

(III) $E_{r'} = \bar{B}_{r'}$ для всех $r' < r \Rightarrow E_r = \bar{B}_r$.

(IV) $E_r = \bar{B}_r \Rightarrow$ существует $c > 0$, такое, что

$$E_{r+c} = \bar{B}_{r+c}.$$

Утверждения (I) и (II) тривиальны.

Доказательство утверждения (III). Пусть $m \in \bar{B}_r$. Если $m \in \bar{B}_{r'}$ для $r' < r$, то, по предположению, $m \in E_{r'} \subset E_r$. Поэтому можно считать, что $\rho(m_0, m) = r$. По лемме 4, можно выбрать последовательность $\{m_k\}$, сходящуюся к m, где $m_k \in \bar{B}_{r_k}$, $r_k < r$. Тогда, по предположению, $m_k \in E_{r_k} \subset E_r$, откуда $m \in E_r$, в силу компактности E_r. Ч. Т. Д.

Доказательство утверждения (IV). По лемме 3, существует $c > 0$, такое, что для каждого $m \in \bar{B}_r$, $\exp_m$ отображает $B(O(m), 2c)$ диффеоморфно на $B(m, 2c)$, поскольку E_r компактно. Пусть $n \in \bar{B}_{r+c}$. Покажем, что $n \in E_{r+c}$. По лемме 4 существует $m \in \bar{B}_r$, такое, что $\rho(m_0, n) = r + \rho(m, n)$, где $\rho(m_0, m) = r$. Следовательно, $\rho(m, n) \leqslant c$, и, значит, существует геодезическая γ от m до n, причем $|\gamma| = \rho(m, n)$. Пусть σ — геодезическая от m_0 до m и $|\sigma| = \rho(m_0, m) = r$. Тогда $\sigma + \gamma$ — ломаная C^∞-кривая от m_0 до n, причем $|\sigma + \gamma| = |\sigma| + |\gamma| = r + \rho(m, n) = \rho(m_0, n)$, откуда, в силу следствия 3 теоремы 2, $\sigma + \gamma$ — репараметризованная геодезическая. Поэтому $n \in E_{r+c}$.

Итак, теорема доказана.

Как показали К. Номидзу и Х. Одзеки [52], всякое связное паракомпактное многообразие допускает полную риманову метрику; более того, они показали, что если всякая риманова метрика полна, то многообразие компактно. Обратное утверждение о полноте компактного метрического пространства хорошо известно.

Задача 7. Построить неполное связное риманово многообразие бесконечного диаметра, такое, что никакие две его точки, удаленные друг от друга на расстояние, большее 1, нельзя соединить кривой минимальной длины.

Задача 8. Пусть i: $N \to M$ — изометрическое вложение. Пусть ρ — риманово расстояние на M, $\rho' = \rho \circ i$ и ρ'' — риманово расстояние на N. Привести примеры, показывающие, что могут встретиться все восемь вариантов полноты этих метрик.

Задача 9. Показать, что для связной группы Ли, допускающей левую и правую инвариантные метрики, экспоненциальное отображение является отображением «на».

Задача 10. Пусть M и N — полные римановы многообразия. Показать, что риманово произведение $M \times N$ полно. Полнота аффинных связностей также сохраняется в произведениях.

Задача 11. Пусть M — полное риманово многообразие.

(а) Тогда всякое риманово накрытие многообразия M является полным.

(б) Для всякого $m \in M$ в каждом гомотопическом классе петель в m существует геодезический сегмент, начинающийся и кончающийся в m.

Задача 12. Привести примеры, показывающие, что результат задачи 11(б) может иметь, а может и не иметь места, если M не полно.

Задача 13. Пусть M — полное риманово многообразие, которое не является односвязным. Показать, что $\rho(m, l)^2$ не может быть C^∞-функцией на всем M.

Пример. Рассмотрим механическую систему с конечным числом степеней свободы, не содержащую элементов, рассеивающих энергию. Тогда *конфигурационным пространством* называется многообразие M, служащее математической моделью совокупности всевозможных положений данной системы. Кривая в M обычно мыслится как изменение положения системы с течением времени, поэтому касательный вектор задается распределением скоростей элементов системы, совместимых со связями, наложенными на систему. *Фазовое пространство* системы — это $T(M)$. Кинетическая энергия, вычисляемая по заданным скоростям, является положительно определенной квадратичной формой на каждом M_m и задает таким образом риманову метрику на M.

Силовое поле на M — это 1-форма θ; интеграл этой 1-формы вдоль кривой равен работе, произведенной при перемещении по этой кривой. Если силовое поле *консервативно*, то $\theta = -dV$, где V — потенциальная энергия.

Если D — символ ковариантной производной данной метрики и X — векторное поле, определенное условием $2\langle X, Y\rangle = \theta(Y)$ для любого Y, то закон Ньютона движения системы принимает вид

$$D_{\gamma_*}\gamma_* = X,$$

где γ — кривая, параметризованная временем.

В частности, траекторией свободного движения служит геодезическая, а время пропорционально длине геодезической. Таким образом, построенное риманово многообразие полно, если после любого толчка движение системы продолжается неограниченно долго. Тогда из любого начального положения с кинетической энергией 1 систему можно направить таким образом, чтобы свободным движением она достигла любой заданной конфигурации за время, равное расстоянию между этими двумя точками на M.

В частном случае твердого тела, закрепленного в центре тяжести, конфигурационное пространство гомеоморфно $P^3 = SO(3)$. Метрика кинетической энергии инвариантна в том и только в том случае, если эллипсоид инерции является сферическим.