8.3. Непрерывные кривые

Пусть γ — непрерывная кривая γ: $[a, b]\to M$. Пусть

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_p<b=t_{p+1}$$

— последовательность чисел, заключенных между a и b. Определим *длину кривой* γ формулой

$$\gamma| = \sup\left\{\sum_{i=0}^{p}\rho(\gamma(t_i),\ \gamma(t_{i+1}))\,|\text{по всем таким последовательностям } t_i\right\}.$$

Предложение 1. Если γ: $[a, b]\to M$ — непрерывная кривая от m до n и $|\gamma|=\rho(m, n)$, то γ — непрерывная репараметризация геодезической. Это означает, что среди непрерывных кривых геодезические локально минимизируют длину.

Доказательство. Возьмем $c>0$, согласно лемме 3, относительно образа γ. Пусть $a<t_1<t_2<b$ таковы, что $\rho(\gamma(t_1),\ \gamma(t_2))<c/2$; тогда существует геодезическая σ от $\gamma(t_1)$ до $\gamma(t_2)$ с $|\sigma|=\rho(\gamma(t_1),\ \gamma(t_2))$. Утверждается, что при любом $t\in(t_1,\ t_2)$ точка $\gamma(t)$ находится на σ. Действительно, возьмем геодезические σ_1, σ_2 от $\gamma(t_1)$ до $\gamma(t)$ и от $\gamma(t)$ до $\gamma(t_2)$ соответственно, причем $|\sigma_1|=\rho(\gamma(t_1),\ \gamma(t))$, $|\sigma_2|=\rho(\gamma(t),\ \gamma(t_2))$. Тогда, поскольку очевидно, что γ локально минимизирует длину, $|\sigma_1+\sigma_2|=\rho(\gamma(t_1),\ \gamma(t))+\rho(\gamma(t),\ \gamma(t_2))=|$длина γ от $\gamma(t_1)$ до $\gamma(t)\,|+|$длина γ от $\gamma(t)$ до $\gamma(t_2)\,|=\rho(\gamma(t_1),\gamma(t_2))$, откуда, по теореме 2, $|\sigma_1|+|\sigma_2|$ — ломаная C^∞-репараметризация кривой σ; это показывает, что $\gamma(t)$ лежит на образе σ. Итак, локально γ — непрерывная репараметризация геодезической и потому, в частности, репараметризация ломаной C^∞-кривой. Наш результат теперь вытекает из следствия 3 к теореме 2.

Предложение 2. Если γ — ломаная C^∞-кривая, то оба определения ее длины совпадают.

Доказательство. Пусть $\{\gamma\}$ — длина γ как непрерывной кривой, а через $|\gamma|$ по-прежнему обозначен интеграл длин касательных. Тогда из определения расстояния тривиально следует, что $\{\gamma\} \leqslant |\gamma|$. Кроме того, легко видеть, что оба определения аддитивны:

$$\{\gamma+\sigma\}=\{\gamma\}+\{\sigma\}, \quad |\gamma+\sigma|=|\gamma|+|\sigma|.$$

Предположим теперь, что γ — кривая, для которой $\{\gamma\}+k=|\gamma|$, $k>0$. Тогда, разделив γ пополам, мы должны на одной из половин получить расхождение по крайней мере на $k/2$. Повторным делением придем к последовательности вложенных отрезков $[s_n, u_n]$, таких, что расхождение для γ, суженной на $[s_n, u_n]$, не меньше $k/2^n$, тогда как $u_n - s_n = c/2^n$, где $c=b-a$, $[a, b]$ — интервал определения γ. Пусть t — общий предел s_n и u_n, и пусть t_n — такое число в $[s_n, u_n]$, что

$$\|\gamma_*(t_n)\| c/2^n = \int_{s_n}^{u_n} \|\gamma_*\|$$

(t_n существует по теореме о среднем значении). Тогда

$$\|\gamma_*(t_n)\| c/2^n \geqslant k/2^n + \{\gamma|_{[s_n, u_n]}\} \geqslant$$
$$\geqslant k/2^n + \rho(\gamma(s_n), \gamma(t)) + \rho(\gamma(t), \gamma(u_n)).$$

Введем новый параметр на γ так, чтобы $t=0$. Умножим полученное неравенство на $2^n/c$, перейдем к пределу и получим неравенство

$$\|\gamma_*(0)\| \geqslant k/c + \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\rho(\gamma(s_n), \gamma(0)) + \rho(\gamma(0), \gamma(u_n))}{u_n - s_n}.$$

Пусть x_i — нормальные координаты в $\gamma(0)$ и $f_i = x_i \circ \gamma$. Тогда

$$\rho(\gamma(s), \gamma(0)) = \left(\sum f_i(s)^2\right)^{1/2} = \left(\sum f_i'(\theta_i s)^2\right)^{1/2} |s|,$$

где $0<\theta_i<1$ по теореме о среднем значении. Поэтому, если положить

$$g(s) = \rho(\gamma(s), \gamma(0))/|s|,$$

то, поскольку

$$g(u_n)u_n - g(s_n)s_n = g(u_n)(u_n - s_n) + (g(u_n) - g(s_n))s_n,$$

получаем

$$\frac{\rho(\gamma(s_n),\ \gamma(0))+\rho(\gamma(0),\ \gamma(u_n))}{u_n-s_n}\leqslant g(u_n)+|g(u_n)-g(s_n)|.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} g(u_n)=\|\gamma_*(0)\|$, то это дает

$$\|\gamma_*(0)\|\geqslant k/c+\|\gamma_*(0)\|,$$

что противоречит неравенству $k>0$. Ч. Т. Д.

Задача 14. Пусть γ: $[a,\ b]\to M$ — непрерывная кривая конечной длины в римановом многообразии. Показать, что γ можно равномерно аппроксимировать ломаными геодезическими.

Задача 15. Пусть φ — отображение риманова многообразия M на риманово многообразие N, сохраняющее расстояния. Доказать, что φ — изометрия (см. [33], стр. 169). Это говорит о том, что топологическая метрика риманова многообразия определяет и риманову метрику, и гладкую структуру.

Задача 16. Пусть φ: $M\to N$ есть C^∞-отображение полного риманова многообразия M на риманово многообразие N, такое, что при любом $m\in M$ пространство M_m распадается в ортогональную сумму подпространств V_m и H_m, а V и H суть C^∞-распределения, причем $V_m=\ker(d\varphi_m)$ и $d\varphi_m$ определяет изометрию из H_m на $N_{\varphi(m)}$. Показать, что

(а) Если γ есть C^∞-кривая в N и $\varphi(m)=\gamma(0)$, то в M существует единственный подъем $\bar\gamma$ кривой γ, такой, что $\bar\gamma(0)=m$, $\gamma=\varphi\circ\bar\gamma$ и $|\gamma|=|\bar\gamma|$.

(б) Подъем геодезической (см. (а)) является геодезической.