ГЛАВА 9

Риманова кривизна

Устанавливаются основные свойства римановой кривизны, дан прямой, но, вообще говоря, не эффективный метод вычисления кривизны. После ряда примеров выводится уравнение Якоби для векторных полей, ассоциированных с прямоугольниками, продольные которых — геодезические, а также несколько локальных и глобальных следствий. В частности, показано, что для полного риманова многообразия с неположительной кривизной экспоненциал является накрывающим отображением [24, 33, 50, 83].

9.1. Риманова кривизна

Пусть M есть d-мерное риманово многообразие с метрикой $\langle\ ,\ \rangle$ и преобразованием кривизны R_{st}, где s, t — касательные к M. Всякое двумерное подпространство P в M_m называется *плоским сечением* в точке $m \in M$.

Пусть P — некоторое плоское сечение в m, и пусть $s, t \in M_m$ — два вектора, натягивающие P.

Риманова кривизна (или *кривизна в двумерном направлении*) $K(P)$ *плоского сечения* P определяется равенством

$$K(P) = \frac{\langle R_{st}s, t\rangle}{A(s, t)^2},$$

где $A(s, t) = (\|s\|^2\|t\|^2 - \langle s, t\rangle^2)^{1/2}$ есть площадь параллелограмма, натянутого на s и t.

Прежде всего мы хотим доказать, что $K(P)$ зависит только от P, но не зависит от выбора s и t, порождающих P. Одновременно будет показано, что $K(P)$ определяет R_{st} и, таким образом, ничего не теряется при рассмотрении римановой кривизны вместо формы кривизны на $F(M)$.

Отметим, что если $\dim M = 2$, то существует только одно плоское сечение в каждой точке $m \in M$ и потому K — вещественная функция на M, называемая *гауссовой кривизной*.

Задача 1. Пусть $f\colon M \to N$ — локальная изометрия. Показать, что f сохраняет кривизну. Показать, что d-мерная риманова сфера имеет постоянную кривизну так же, как и d-мерное вещественное проективное пространство.

Лемма 1. Пусть x, y, z, $w \in M_m$. Тензор кривизны R удовлетворяет следующим условиям:

(а) $R_{xy} = -R_{yx}$, (б) $\langle R_{xy}z, w\rangle = -\langle z, R_{xy}w\rangle$,

(в) $R_{xy}z + R_{zx}y + R_{yz}x = 0$, (г) $\langle R_{xy}z, w\rangle = \langle R_{zw}x, y\rangle$.

Эти условия можно интерпретировать как свойства линейного преобразования, соответствующего R, на втором грассмановом пространстве G_m^2, пространстве бивекторов. Для этого определим R_{xy} как бивектор, удовлетворяющий условию $\langle R_{xy}, zw\rangle = \langle R_{xy}z, w\rangle$ для всех разложимых бивекторов zw. Тогда (б) утверждает, что такое определение R_{xy} корректно; равенство (а) означает, что этот бивектор зависит лишь от бивектора xy, но не от x и y в отдельности, поэтому $xy \to R_{xy}$ можно линейно продолжить до эндоморфизма пространства всех бивекторов; (г) означает, что R — симметрическое преобразование бивекторов, поэтому это преобразование определяется соответствующей квадратичной формой. Наконец, (в) означает, что эта квадратичная форма определяется своими значениями на разложимых элементах (см. ниже, следствие 2).

Если $x_1, \ldots, x_d$ — координатная система в m, то классический объект R_{ijkl} задается равенством

$$R_{ijkl} = \langle R_{X_i X_j} X_k, X_l\rangle,$$

где $X_i = D_{x_i}$. Тогда вышеуказанные формулы соответствуют классическим, а именно:

(а′) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$, (б′) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$,

(в′) $R_{ijkl} + R_{kijl} + R_{jkil} = 0$, (г′) $R_{ijkl} = R_{klij}$.

Доказательство леммы 1. Пусть $x, y \in M_m$, $b \in F(M)$ и $\bar{x}, \bar{y} \in F(M)_b$ таковы, что $d\pi \bar{x} = x$, $d\pi \bar{y} = y$. Тогда, в силу 6.1.5, если $z \in M_m$, то

$$R_{xy}z = -b\Phi(\bar{x}, \bar{y})b^{-1}z,$$

где b рассматривается как отображение $R^d \to M_m$; (а) теперь следует из того, что Φ есть альтернированная форма (б) же вытекает из $\mathfrak{o}(d)$-значности Φ, поскольку $\mathfrak{o}(d)$ состоит из кососимметрических преобразований R^d.

Для доказательства (в) заметим сначала, что при $a, b, c \in R^d$

$$H[[E(a), E(b)], E(c)] = -H[\lambda\Phi(E(a), E(b)), E(c)] \quad (6.1.4)$$
$$= -E(\Phi(E(a), E(b))c). \quad (6.2.1)$$

Выбирая $\bar{x}, \bar{y}$ специальным образом, получаем

$$R_{xy}z = -b\Phi(E(b^{-1}(x))(b), E(b^{-1}(y))(b))b^{-1}(z),$$

так что

$$E(b^{-1}R_{xy}z)(b) =$$
$$= -E(\Phi(E(b^{-1}(x))(b), E(b^{-1}(y))(b))b^{-1}z)(b) =$$
$$= H[[E(b^{-1}(x)), E(b^{-1}(y))], E(b^{-1}(z))](b).$$

Но тождество Якоби дает

$$E(b^{-1}(R_{xy}z + R_{zx}y + R_{yz}x))(b) = 0,$$

что доказывает (в), поскольку E и b взаимно однозначны.

Формула (г) вытекает из (а), (б), (в), если взять скалярные произведения равенства (в) на w, после чего циклически переставить x, y, z, w, затем сложить полученные четыре равенства и надлежащим образом воспользоваться (а) и (б). Детали предоставляются читателю.

Следствие 1. $K(P)$ определено корректно.

Доказательство. Для $x, y \in M_m$ положим $K(x, y) = \langle R_{xy}x, y\rangle / A(x, y)^2$. Заметим, что

(I) $K(x, y)=K(y, x)$,

(II) $K(ax, by)=K(x, y)$, если $ab\neq 0$,

(III) $K(x+cy, y)=K(x, y)$.

Отсюда следует, что если $x'=ax+by$, $y'=cx+dy$, $ad-bc\neq 0$, то $K(x', y')=K(x, y)$, поскольку, как известно, это преобразование от (x, y) к (x', y') может быть получено последовательностью преобразований, указанных в (I), (II), (III).

Следствие 2. $\langle R_{xy}x, y\rangle$ определяет преобразования кривизны.

Доказательство. Более точно, $\langle R_{xy}z, w\rangle$ является единственной 4-линейной функцией, удовлетворяющей условиям леммы 1, сужение которой есть $\langle R_{xy}x, y\rangle$. Предположим таким образом, что имеется две 4-линейные функции f и f' на M_m, которые удовлетворяют условиям, соответствующим (а)—(г), и такие, что $f(x,y,x,y)=f'(x,y,x,y)$ для всех x, $y\in M_m$. Полагая $g=f-f'$, найдем, что g удовлетворяет тем же условиям, соответствующим (а)—(г). Заменяя x на $x+z$ в равенстве $g(x, y, x, y)=0$, получим

$$g(x, y, x, y)+g(z, y, x, y)+g(x, y, z, y)+g(z, y, z, y)=0$$

и, значит,

$$g(x, y, z, y)+g(z, y, x, y)=0.$$

В силу (г),

$$g(x, y, z, y)=0.$$

Заменяя y на $y+w$ и поступая таким же образом, находим, что

$$g(x, w, z, y)+g(x, y, z, w)=0.$$

Воспользовавшись (г) и (а), найдем, что

$$g(x, y, z, w)=g(y, z, x, w),$$

откуда $g(\cdot,\cdot,\cdot, w)$ инвариантно относительно циклических подстановок трех аргументов. Но, в силу (в), сумма по таким подстановкам равна 0, откуда $g=0$. Ч. Т. Д.

Замечания. (1) Иногда удобнее иметь дело с кривизной вместо преобразований кривизны; следствие 2 обеспечивает сохранение информации.

(2) Пусть M имеет две римановы структуры; если в некоторой точке совпадают соответствующие скалярное произведение и кривизна, то в этой точке совпадают и преобразования кривизны.

(3) Не верно, что кривизна определяет преобразования кривизны, поскольку различные римановы структуры с различными преобразованиями кривизны могут порождать одинаковую кривизну. Например, пусть $f\colon S^2 \to S^2$ — произвольный диффеоморфизм римановой 2-сферы. Рассматривая f как изометрию, получим две римановы структуры на S^2 с разными преобразованиями кривизны, но с одинаковой (постоянной) кривизной.

Задача 2. Пусть $q(x, y) = f(x, y, x, y)$, $x, y \in M_m$. Установить следующую явную формулу для f в терминах q:

$$\begin{aligned}6f(x, y, z, w) &= q(x+z, y+w) - q(x+w, y+z) + \\ &+ q(x, y+z) - q(x, y+w) - q(y, x+z) + q(y, x+w) - \\ &- q(z, y+w) + q(z, x+w) - q(w, x+z) + q(w, y+z) + \\ &+ q(x, w) - q(x, z) + q(y, z) - q(y, w).\end{aligned}$$

Задача 3. С помощью следующего наброска доказать *теорему Шура* [25]: Если K постоянно на каждом слое расслоения $G_{d,2}(M)$, то K постоянно на всем пространстве $G_{d,2}(M)$ при $d > 2$.

(а) Это предположение эквивалентно условию: для любых $x, y \in R^d$ функция $\langle \Phi(E(x), E(y))x, y \rangle$ постоянна на слоях расслоения $F(M)$.

(б) Поскольку функции, зависящие от x, y в (а), определяют функции $\langle \Phi(E(x), E(y))z, w \rangle$, то эта гипотеза эквивалентна тому, что

$\Phi(E(x), E(y))$ постоянно на слоях в $F(M)$.

(в) Если $F\Phi(E(x), E(y)) = 0$ для всех вертикальных F, x, $y \in R^d$, то $E(z)\Phi(E(x), E(y)) = 0$ для всех x, y, $z \in R^d$, и потому $\Phi(E(x), E(y))$ постоянно на $F(M)$,

K постоянно на $G_{d,2}(M)$. [*Указание*: воспользоваться тождеством Бьянки

$$D\Phi(E(x),\ E(y),\ E(z)) = E(x)\Phi(E(y),\ E(z)) + \\ + E(y)\Phi(E(z),\ E(x)) + E(z)\Phi(E(x),\ E(y)) = 0$$

и тем, что

$$[\bar{A},\ E(x)] = \bar{A}E(x) - E(x)\bar{A} = E(Ax) \text{ для } A \in \mathfrak{o}(d),$$

откуда $E(x)\bar{A} + E(Ax) = \bar{A}E(x)$.]

9.2. Вычисление римановой кривизны

Мы покажем, как можно вычислить риманову кривизну в терминах метрических коэффициентов g_{ij}. В частности, мы установим связь между преобразованием кривизны и метрикой.

Согласно п. 6.4.3, если X, Y — векторные поля, то

$$R_{XY} = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X,\ \nabla_Y],$$

где ∇_X — ковариантная производная по X. Но в силу [51, стр. 81], если X, Y, Z — векторные поля, то

$$2\langle\nabla_X Y,\ Z\rangle = X\langle Y,\ Z\rangle + Y\langle X,\ Z\rangle - Z\langle X,\ Y\rangle + \langle[X,\ Y],\ Z\rangle + \\ + \langle[Z,\ X],\ Y\rangle + \langle X,\ [Z,\ Y]\rangle.$$

Эти две формулы дают искомое соотношение.

Задача 4. Вышеуказанная формула опирается на следующие факты:

(1) Кручение равно нулю тогда и только тогда, когда $[X,\ Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, где X, Y — произвольные векторные C^∞-поля.

(2) Параллельный перенос сохраняет скалярное произведение в том и только в том случае, если $X\langle Y,\ Z\rangle = \langle\nabla_X Y,\ Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$. Доказать эти утверждения и формулу. Вывести явную формулу для $K(D_{x_i},\ D_{x_j})$ в терминах g_{ij}.

Задача 5. С помощью этой формулы получить новое решение задачи 7.18.