K постоянно на $G_{d,2}(M)$. [*Указание*: воспользоваться тождеством Бьянки

$$D\Phi(E(x),\ E(y),\ E(z)) = E(x)\Phi(E(y),\ E(z)) + \\ + E(y)\Phi(E(z),\ E(x)) + E(z)\Phi(E(x),\ E(y)) = 0$$

и тем, что

$$[\bar{A},\ E(x)] = \bar{A}E(x) - E(x)\bar{A} = E(Ax) \quad \text{для } A \in \mathfrak{o}(d),$$

откуда $E(x)\bar{A} + E(Ax) = \bar{A}E(x)$.]

9.2. Вычисление римановой кривизны

Мы покажем, как можно вычислить риманову кривизну в терминах метрических коэффициентов g_{ij}. В частности, мы установим связь между преобразованием кривизны и метрикой.

Согласно п. 6.4.3, если X, Y — векторные поля, то

$$R_{XY} = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X,\ \nabla_Y],$$

где ∇_X — ковариантная производная по X. Но в силу [51, стр. 81], если X, Y, Z — векторные поля, то

$$2\langle\nabla_X Y,\ Z\rangle = X\langle Y,\ Z\rangle + Y\langle X,\ Z\rangle - Z\langle X,\ Y\rangle + \langle[X,\ Y],\ Z\rangle + \\ + \langle[Z,\ X],\ Y\rangle + \langle X,\ [Z,\ Y]\rangle.$$

Эти две формулы дают искомое соотношение.

Задача 4. Вышеуказанная формула опирается на следующие факты:

(1) Кручение равно нулю тогда и только тогда, когда $[X,\ Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, где X, Y — произвольные векторные C^∞-поля.

(2) Параллельный перенос сохраняет скалярное произведение в том и только в том случае, если $X\langle Y,\ Z\rangle = \langle\nabla_X Y,\ Z\rangle + \langle Y,\ \nabla_X Z\rangle$. Доказать эти утверждения и формулу. Вывести явную формулу для $K(D_{x_i},\ D_{x_j})$ в терминах g_{ij}.

Задача 5. С помощью этой формулы получить новое решение задачи 7.18.