9.3. Непрерывность римановой кривизны

Кривизна K определена не на самом римановом многообразии M, а на грассмановом многообразии его 2-плоскостей [§ 3.3, п. (5)] и в действительности является там непрерывной функцией. Отсюда будет следовать, что кривизна ограничена на компактном подмножестве в M.

Пусть $G_{d,2}$ — грассманово многообразие плоских сечений (двумерных подпространств) пространства R^d (см. задачу 7.30). Тогда

$$G_{d,2} = O(d)/O(2) \times O'(d-2).$$

Обозначим через $G_{d,2}(M)$ расслоение со слоем $G_{d,2}$, ассоциированное с расслоением ортонормальных базисов $F(M)$, где M — риманово многообразие. Таким образом, $G_{d,2}(M) = F(M) \times_{O(d)} G_{d,2}$. Если $m \in M$, то $G_{d,2}(m)$ означает слой в $G_{d,2}(M)$ над m. Если $b \in F(M)$ таково, что $\pi(b) = m$, то $b\colon G_{d,2} \overset{\approx}{\rightarrow} G_{d,2}(m)$, определенное формулой $P \to \{(b, P)\} = (b, P)\,O(d)$, класс эквивалентности точки (b, P) в $G_{d,2}(M)$. Поскольку $b\colon R^d \overset{\approx}{\rightarrow} M_m$, то b отображает $G_{d,2}$ изоморфно на множество плоских сечений в точке m, а получающееся отождествление этого множества с $G_{d,2}(m)$ не зависит от b. Следовательно, риманову кривизну K можно рассматривать как вещественную функцию, определенную на $G_{d,2}(M)$. (Здесь через $F(M) \times_{O(d)} G_{d,2}$ обозначено пространство $(F(M) \times \times G_{d,2})/O(d)$ из § 3.3.)

Предложение 1. Функция $K\colon G_{d,2}(M) \to R$ принадлежит C^∞ и, в частности, непрерывна.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F(M) \times O(d) \arrow[d, "p"] \arrow[ddr, "K \circ q \circ p"] & \\
F(M) \times G_{d,2} \arrow[d, "q"] & \\
F(M) \times_{O(d)} G_{d,2} \arrow[r, "K"] & R
\end{tikzcd}$$

p, q - отображения отождествления

Надо лишь показать, что $K \circ q \circ p \in C^\infty$. Для определения отображения p мы должны сначала выбрать элемент из $G_{d,2}$, скажем P_0. Тогда $p(b, g) = (b, gP_0)$. Отсюда $K \circ q \circ p(b, g) = K(b(gP_0))$, поскольку b — отображение $G_{d,2}$ в пространство плоских сечений в m. Пусть P_0 натянуто на ортонормальные векторы x, $y \in R^d$. Тогда

$$K(bg, P_0) = \langle R_{b(gx)b(gy)} b(gx), b(gy) \rangle =$$
$$= -\langle b\Phi(E(gx)(b), E(gy)(b))gx, gy \rangle,$$

очевидно, C^∞-функция по b и g. Ч. Т. Д.

Так как $G_{d,2}$ компактно, то мы получаем

Следствие. Если $C \subset M$ — компакт, то существуют H, $L \in R$, такие, что $H \leqslant K(P) \leqslant L$ для любого плоского сечения P в произвольной точке $m \in C$.

Замечание. Кривизна риманова многообразия, очевидно, зависит от той римановой структуры, которой наделено данное многообразие. Так, плоский тор имеет всюду нулевое кручение, тогда как вложенный тор (баранка) имеет точки и с положительной, и с отрицательной кривизной. Все же на данном многообразии кривизна не совсем произвольна. Например, будет доказано, что односвязное компактное многообразие не может иметь всюду неположительную кривизну (см. следствие 2 теоремы 4), тогда как некомпактное полное многообразие не может иметь положительную кривизну с ненулевой нижней границей (гл. 11). Более того, существует связь между кривизной и топологическими инвариантами многообразия, выражаемая теоремой Гаусса — Бонне, которую мы не рассматриваем [89, 92]. Однако в общем случае об этих ограничениях известно немного [11, 14].

Задача 6. Полное риманово многообразие является *локально симметрическим*, если кривизна плоского сечения инвариантна относительно параллельного переноса плоского сечения вдоль геодезических. Показать, что это утверждение эквивалентно обращению в нуль ковариантных производных преобразования кривизны.

Задача 7. Пусть M — риманово симметрическое пространство. Показать, что симметрия f_m пространства M_m переводит касательную в вектор, противоположный ее параллельному переносу вдоль геодезической, проходящей через m. Вывести отсюда, что M — локально симметрическое пространство. Обратно, как следует из соображений монодромии, односвязное локально симметрическое многообразие является римановым симметрическим.

Пусть M — снова риманово симметрическое пространство. Известно (§ 7.4, п. 14), что M — однородное симметрическое пространство, т. е. $M=G/H$, причем G допускает инволюцию f. Положим $0=eH\in M$, $\mathfrak{h}=\{X\in\in\mathfrak{g}\,|\,df(X)=X\}$, $\mathfrak{m}=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,df(X)=-X\}$; тогда $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы H.

Задача 8. Доказать соотношения $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h},\mathfrak{m}]\subset\subset\mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{h}$.

Задача 9. Доказать, что при $X\in\mathfrak{m}$ кривая $e^{tX}\cdot 0$ является геодезической в M. [*Указание*: показать, что если σ — геодезическая, то кривая $\beta(t)=f_0 f_{\sigma(t)}$ в G удовлетворяет следующим условиям:

(1) β — однопараметрическая группа (*трансвекций*).

(2) β соответствует некоторому элементу из $\mathfrak{m}$.] Показать, что тогда существует изоморфизм между $\mathfrak{m}$ и M_0. Далее, пусть скалярное произведение $\langle\,,\rangle$ на M_0 сносится этим изоморфизмом в скалярное произведение $(\,,)$ на $\mathfrak{m}$; показать, что

$$([X, Y], Z)+(Y, [X, Z])=0,$$

где $X\in\mathfrak{h}$, Y, $Z\in\mathfrak{m}$. (Форма, обладающая этим свойством, называется *инвариантной* относительно $\mathfrak{h}$. Ср. с задачей 7.23.)

Задача 10. Показать, что группа H компактна, пользуясь тем, что ее можно рассматривать как замкнутое подмножество ортогональной группы. Вывести отсюда, что форму $(\,,)$ можно продолжить до скалярного произведения $(\,,)$ на всем $\mathfrak{g}$ (см. § 7.4, п. 11), инвариантного относительно df и $\mathfrak{h}$.

Форма Киллинга $k(\ ,\ )$ на $\mathfrak{g}$ также инвариантна относительно df, ибо $\operatorname{ad}(df X) \circ \operatorname{ad}(df Y) = df \circ \operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y \circ \circ df^{-1}$ (задача 7.23). Вывести отсюда, что $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{h}$ взаимно ортогональны относительно каждой из этих форм.

Задача 11. Говорят, что M — *неприводимое* симметрическое пространство, если $\operatorname{ad} \mathfrak{h}|_{\mathfrak{m}}$ вещественно неприводимо. Вообще существует такое линейное преобразование S_k пространства $\mathfrak{m}$, что для $Y,\ Z \in \mathfrak{m}$

$$k(Y, Z) = (S_k Y, Z).$$

Показать, что $\mathfrak{m}$ распадается в сумму характеристических подпространств преобразования S_k и что эти подпространства инвариантны относительно $\operatorname{ad} \mathfrak{h}$. В частности, если M неприводимо, то существует вещественное число λ, такое, что на $\mathfrak{m}$

$$k(\ ,\ ) = \lambda(\ ,\ ).$$

Из задачи 7.8 вытекает, что только единичный элемент H действует тривиально на $\mathfrak{m}$ и, следовательно, если $X \in \mathfrak{h}$, $X \neq 0$, то $\operatorname{ad} X|_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Отсюда, а также из кососимметричности $\operatorname{ad} X$ относительно $(\ ,\ )$ вывести, что $k(\ ,\ )$ отрицательно определено на $\mathfrak{h}$. Если M неприводимо и $\lambda \neq 0$, то это показывает, что $k(\ ,\ )$ невырождено на $\mathfrak{g}$, откуда сразу же следует, что в $\mathfrak{g}$ нет собственных абелевых идеалов, т. е. $\mathfrak{g}$ — *полупростая алгебра*. Можно показать, что если $k(\ ,\ )$ отрицательно определено, так что $\lambda < 0$, то G компактно (см. [80], стр. 141).

Задача 12. Выделим $f \in F(M)$, такое, что $\pi(f) = 0$; рассмотрим соответствующее вложение пространства G как гладкого подмногообразия в $F(M)$ (см. задачу 6.21). Показать, что G — подрасслоение в $F(M)$ с группой H, и, значит, H можно рассматривать как подгруппу в $O(d)$.

Задача 13. Группа G действует на $F(M)$, и поэтому можно говорить об инвариантных векторных полях на $F(M)$. Показать, что базисное и фундаментальное векторные поля инвариантны.

Задача 14. Пусть $X \in \mathfrak{m}$, $Y \in \mathfrak{h}$. Показать, что X является сужением на G некоторого базисного векторного поля, и, следовательно, риманова связность на $F(M)$ приводится к связности на G. Это показывает, что группа голономии многообразия M относительно f содержится в группе изотропии H. Обратное также верно [26]. Показать, что Y есть сужение на G некоторого фундаментального векторного поля, и в действительности $Y = \lambda Y$, где $\mathfrak{h}$ рассматривается как подалгебра в $\mathfrak{o}(d)$. Пусть $X = E(x)|_G$, $x \in R^d$; показать, что

$$\operatorname{ad} Y(X) = E(Yx)|_G.$$

Задача 15. Пусть X, Y, $Z \in \mathfrak{m} \approx M_0$. Показать, что преобразование кривизны задается формулой

$$R_{XY}Z = [[X, Y], Z].$$

Воспользовавшись этим, вывести формулу для кривизны плоского сечения M_0 в терминах структуры алгебры Ли в $\mathfrak{g}$ и скалярного произведения $(\ ,\ )$. Это позволяет определить кривизну всюду на M.

Задача 16. Предположим, что M неприводимо. Показать, что если $\lambda = 0$, то и кривизна обращается в нуль, иными словами, кривизна неотрицательна или неположительна в соответствии с тем, отрицательно или положительно λ.

Задача 17. Вычислить (постоянную) кривизну d-мерной римановой сферы радиуса r.

Примеры. *Грассмановы многообразия.*

Вещественный случай. Если A — матрица с вещественными элементами, то через A^* будем обозначать ее транспонированную. Грассманово многообразие $G_{d+e,\,d}$ d-плоскостей в R^{d+e} можно реализовать как однородное пространство $O(d+e)/O(d) \times O(e)$. Элементы алгебры Ли группы $O(d+e)$, разложив на соответствующие блоки, мы можем рассматривать как матрицы вида $\begin{pmatrix} A & C \\ -C^* & B \end{pmatrix}$, где $A^* = -A$, $B^* = -B$. Легко проверяется, что $df\begin{pmatrix} A & C \\ -C^* & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & -C \\ C^* & B \end{pmatrix}$ определяет инволюцию алгебры Ли с неподвижной алгеброй $\mathfrak{o}(d)+\mathfrak{o}(e)$, порождающую инволюцию группы $O(d+e)$ с неподвижной подгруппой $O(d)\times O(e)$.

Если положить (X, X) равным сумме квадратов элементов матрицы X, — в этом случае $X\in\mathfrak{o}(d+e)$, $(X, X)=-\operatorname{tr}X^2$, — то $(\ ,\ )$ оказывается положительно определенной формой на $\mathfrak{o}(d+e)$, инвариантной относительно $\mathfrak{o}(d+e)$ и df. Таким образом, $G_{d+e,\,d}$ становится римановым симметрическим пространством.

Ориентированное грассманово многообразие

$$G'_{d+e,\,d}=SO(d+e)/SO(d)\times SO(e)$$

является двулистным накрытием пространства $G_{d+e,\,d}$ и поэтому также римановым симметрическим пространством.

Задача 18. Проверить не доказанные выше утверждения. Найти явную матричную формулу для инволюции f. Показать, что на $G'_{d+e,\,d}$ есть только одна нетривиальная изометрия, соответствующая тождественному преобразованию на $G_{d+e,\,d}$. Найти группы изометрий пространств $G_{d+e,\,d}$ и $G'_{d+e,\,d}$. Вычислить группы изотропии.

Комплексный и кватернионный случаи. Рассмотрения аналогичны вещественному случаю, только теперь A^* — транспонированная сопряженная к матрице A. Та же формула для df определяет инволюцию вещественных алгебр Ли, продолжающуюся до инволюции унитарной или симплектической групп, порождая инволюции в совокупности всех d-мерных подпространств в C^{d+e}

$$H_{d+e,\,d}=U(d+e)/U(d)\times U(e)$$

и в совокупности d-мерных подпространств в Q^{d+e}

$$K_{d+e,\,d}=Sp(d+e)/Sp(d)\times Sp(e).$$

(Определение симплектической группы см. в [95, стр. 39].)

Сумма норм элементов матрицы снова является положительно определенной квадратичной формой на алгебре Ли, инвариантной относительно действия всей алгебры Ли ($\mathfrak{u}(d+e)$ или $\mathfrak{sp}(d+e)$) и df. Таким образом, каждое из указанных однородных пространств становится римановым симметрическим пространством.

Касательное пространство в базисной точке каждого из этих симметрических пространств можно отождествить с матрицами вида $\begin{pmatrix} 0 & C \\ -C^* & 0 \end{pmatrix}$, а затем с самими матрицами C, элементы которых принадлежат соответствующим полям. Но тогда это касательное пространство наделяется структурой комплексного или кватернионного векторного пространства. В комплексном случае эта структура инвариантна относительно действия $\mathrm{ad}(\mathfrak{u}(d)+\mathfrak{u}(e))$, поэтому она может быть инвариантно индуцирована на всяком другом касательном пространстве посредством действия группы $U(d+e)$; таким образом, $H_{d+e,\,d}$ обладает структурой почти комплексного многообразия. (В действительности «почти» можно опустить.) Плоские сечения, состоящие из комплексных кратных единственного вектора, называются *голоморфными*. Кватернионная структура не инвариантна относительно $\mathrm{ad}(\mathfrak{sp}(d)+\mathfrak{sp}(e))$, поэтому на произвольном касательном пространстве многообразия $K_{d+e,\,d}$ нельзя инвариантно индуцировать кватернионную структуру.

Задача 19. Показать, что симметрические пространства $G_{d+e,\,d}$, $H_{d+e,\,d}$ и $K_{d+e,\,d}$ неприводимы при отрицательном λ (см. задачу 11). Кроме того, они имеют неотрицательную кривизну, которая все же не положительна, если только d или e не равны 1.

Задача 20. При $d=1$ грассмановы многообразия становятся проективными пространствами или сферами. С помощью задачи 15 показать, что их кривизну можно описать следующим образом:

Вещественное поле: все сечения имеют одинаковую кривизну.

Комплексное поле: если $X \perp Y$, $X, Y \in \mathfrak{m}$ и θ — угол между голоморфными сечениями, порожденными X

и Y, то $K(X, Y)=1+3\cos^2\theta$. В частности, только голоморфные сечения достигают максимальной кривизны 4, и эта так называемая *голоморфная кривизна* постоянна.

Кватернионное поле: если $X\perp Y$, $X, Y\in\mathfrak{m}$ и θ — угол между 4-мерными подпространствами XQ и YQ, то $K(X, Y)=1+3\cos^2\theta$.

Противоположные пространства. Алгебра Ли матриц вида $\begin{pmatrix} A & C \\ C^* & B \end{pmatrix}$, где $A^*=-A$, $B^*=-B$, с элементами в одном из вышеуказанных полей, обладает инволюцией

$$df\begin{pmatrix} A & C \\ C^* & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & -C \\ -C^* & B \end{pmatrix}.$$

Эта инволюция продолжается до инволюции связной подгруппы G в $Gl(d+e, F)$, соответствующей данной алгебре Ли. Факторизуя по неподвижной подгруппе H, получаем однородное пространство M. Матрицы $\{X\}$ с $A=B=0$ можно отождествить с касательными к M в точке $0=eH$, а с помощью суммы квадратов норм, в данном случае $\operatorname{tr} X^2$, можно наделить M структурой риманова симметрического пространства. В этом случае скалярное произведение на $\mathfrak{m}$ инвариантно лишь относительно $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$, но не всего $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$, как для грассмановых многообразий.

Задача 21. Показать, что это неприводимые пространства с положительным λ. Кроме того, отображение, переводящее $\begin{pmatrix} 0 & C \\ -C^* & 0 \end{pmatrix}$ в $\begin{pmatrix} 0 & C \\ C^* & 0 \end{pmatrix}$, определяет изометрию касательного пространства к M с касательным пространством соответствующего грассманова многообразия, причем кривизны соответствующих плоских сечений совпадают по величине, но противоположны по знаку.

В случае вещественного поля и $d=1$ мы получаем, таким образом, *гиперболическое e-пространство* R^e, снабженное метрикой постоянной отрицательной кривизны. Показать, что отображение exp: $R^e \to M$, задаваемое формулой

$$\exp(X) = \exp\begin{pmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{pmatrix} \cdot H,$$

взаимно однозначно.

9.4. Прямоугольники и поля Якоби

Большинство теорем этой, а также одиннадцатой главы связано с поведением близких геодезических или его инфинитезимальным аналогом. В общем случае достаточно рассматривать однопараметрическое семейство таких геодезических, и поэтому естественно для их изучения использовать прямоугольник (§ 8.1).

Пусть Q есть C^∞-прямоугольник в римановом многообразии M. Воспользуемся обозначениями § 8.1 и доказательством теоремы 8.1.

Лемма 2. Если продольные кривые в Q являются геодезическими, то имеют место следующие формулы:

(а) $D_1\omega^Q(D_2) - D_2\omega^Q(D_1) = \varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1)$,

(б) $D_1\varphi^Q(D_2) = \Phi^Q(D_1, D_2)$,

(в) $D_1^2\omega^Q(D_2) = \Phi^Q(D_1, D_2)\,\omega^Q(D_1)$.

Формула (в) является вариантом уравнения Якоби. [Φ^Q не встречалось в § 8.1, но обозначает, разумеется, $\bar{Q}^*\Phi$, где $\bar{Q}$ — канонический подъем Q через $f \in F(M)$.]

Доказательство. Формула (а) уже доказана и применялась в теореме 8.1. Второе структурное уравнение, теорема 6.4, дает

$$d\varphi^Q = -\frac{1}{2}[\varphi^Q, \varphi^Q] + \Phi^Q.$$

Применяя это к D_1, D_2, имеем

$$D_1\varphi^Q(D_2) - D_2\varphi^Q(D_1) - \varphi^Q([D_1, D_2]) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left([\varphi^Q(D_1), \varphi^Q(D_2)] - [\varphi^Q(D_2), \varphi^Q(D_1)]\right) + \Phi^Q(D_1, D_2).$$