визны. Показать, что отображение exp: $R^e \to M$, задаваемое формулой

$$\exp(X) = \exp\begin{pmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{pmatrix} \cdot H,$$

взаимно однозначно.

9.4. Прямоугольники и поля Якоби

Большинство теорем этой, а также одиннадцатой главы связано с поведением близких геодезических или его инфинитезимальным аналогом. В общем случае достаточно рассматривать однопараметрическое семейство таких геодезических, и поэтому естественно для их изучения использовать прямоугольник (§ 8.1).

Пусть Q есть C^∞-прямоугольник в римановом многообразии M. Воспользуемся обозначениями § 8.1 и доказательством теоремы 8.1.

Лемма 2. Если продольные кривые в Q являются геодезическими, то имеют место следующие формулы:

(а) $D_1\omega^Q(D_2) - D_2\omega^Q(D_1) = \varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1)$,

(б) $D_1\varphi^Q(D_2) = \Phi^Q(D_1, D_2)$,

(в) $D_1^2\omega^Q(D_2) = \Phi^Q(D_1, D_2)\,\omega^Q(D_1)$.

Формула (в) является вариантом уравнения Якоби. [Φ^Q не встречалось в § 8.1, но обозначает, разумеется, $\bar{Q}^*\Phi$, где $\bar{Q}$ — канонический подъем Q через $f \in F(M)$.]

Доказательство. Формула (а) уже доказана и применялась в теореме 8.1. Второе структурное уравнение, теорема 6.4, дает

$$d\varphi^Q = -\frac{1}{2}[\varphi^Q, \varphi^Q] + \Phi^Q.$$

Применяя это к D_1, D_2, имеем

$$D_1\varphi^Q(D_2) - D_2\varphi^Q(D_1) - \varphi^Q([D_1, D_2]) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left([\varphi^Q(D_1), \varphi^Q(D_2)] - [\varphi^Q(D_2), \varphi^Q(D_1)]\right) + \Phi^Q(D_1, D_2).$$

Но $\varphi^Q(D_1)=0$ и $[D_1, D_2]=0$, поэтому

$$D_1\varphi^Q(D_2)=\Phi^Q(D_1, D_2),$$

а это есть (б).

Применим теперь D_1 к обеим частям равенства (а):

$$D_1^2\omega^Q(D_2)-D_1D_2\omega^Q(D_1)=$$
$$=(D_1\varphi^Q(D_2))\,\omega^Q(D_2)+\varphi^Q(D_2)(D_1\omega^Q(D_1)).$$

Но $D_1\omega^Q(D_1)=0$, а потому и $D_1D_2\omega^Q(D_1)=D_2D_1\omega^Q(D_1)=0$, так как $[D_1, D_2]=0$. Следовательно,

$$D_1^2\omega^Q(D_2)=(D_1\varphi^Q(D_2))\,\omega^Q(D_1).$$

Формула (в) получается теперь подстановкой (б) в это равенство. Ч. Т. Д.

Поля Якоби устанавливают связь между поведением близких кривых и кривизной. Это специальные векторные поля, определенные вдоль геодезической. Пусть σ — геодезическая и V — векторное поле вдоль σ. [В действительности V — кривая в $T(M)$ над σ.] Поле V является *полем Якоби*, если

$$\nabla_{\sigma_*}(\nabla_{\sigma_*}(V))=-R_{\sigma_* V}\sigma_*.$$

Так как V определено только на σ, то $\nabla_{\sigma_*}V$ мы будем часто обозначать через V'. Таким образом, уравнение Якоби принимает вид $V''=R_{V\sigma_*}\sigma_*$.

Приведем его к классическому виду.

Определим функции R_{ijkl} на $F(M)$, положив $R_{ijkl}=\Phi_{ij}(E_k, E_l)$. Возьмем $b=(\sigma(0); e_1, \ldots, e_d)\in F(M)$, такое, что $e_d=\sigma_*(0)$. Пусть $\bar\sigma(t)=(\sigma(t); e_1(t), \ldots, e_d(t))$, $\bar V$ и $\bar e_d$ — горизонтальные подъемы σ, V и e_d соответственно. Имеем $V(t)=\sum v_i(t)\,e_i(t)$. Тогда

$$R_{V(t)\sigma_*(t)}\sigma_*(t)=R_{V(t)e_d(t)}e_d(t)=$$
$$=-\sum\Phi_{id}(\bar V(t), \bar e_d(t))\,e_i(t) \qquad (6.1.5)$$
$$=-\sum\Phi_{id}\left(\sum v_k(t)E_k(\bar\sigma(t)), E_d(\bar\sigma(t))\right)e_i(t)=$$
$$=-\sum v_k(t)\,R_{idkd}(\bar\sigma(t))\,e_i(t).$$

С другой стороны, $V''(t)=\sum v_i''(t)\,e_i(t)$, и уравнение Якоби принимает вид $v_i''(t)=-\sum_k v_k(t)\,R_{idkd}\,(\bar\sigma(t))$.

В частности, $v_d''(t)=0$, так что компонента V в направлении σ_* является линейной функцией от t. Таким образом, если V перпендикулярно к σ_* в двух точках, то они перпендикулярны всюду. В любом случае поведение остальных v_i не зависит от v_d, так как $R_{iddd}=0$.

В двумерном случае $v_1''=-R_{1212}(\sigma(t))\,v_1(t)$ или $v''+Kv=0$, где K — гауссова кривизна.

Так как уравнение Якоби — линейное уравнение второго порядка, то из теории дифференциальных уравнений непосредственно вытекает

Предложение 2. Поля Якоби вдоль σ образуют линейное пространство размерности $2d$ над R. Для произвольных x, $y \in M_{\sigma(0)}$ существует единственное поле Якоби V, такое, что $V(0)=x$ и $V'(0)=y$. Поля Якоби, которые в $\sigma(0)$ обращаются в нуль, образуют линейное подпространство размерности d, причем их значения заполняют все $M_{\sigma(t)}$ при достаточно малом t. Если t достаточно мало, то для любых $x\in M_{\sigma(0)}$, $y\in M_{\sigma(t)}$ существует единственное поле Якоби V, такое, что $V(0)=x$ и $V(t)=y$.

Следующая теорема характеризует поля Якоби с геометрической точки зрения.

Теорема 1. Векторное поле V вдоль геодезической σ является полем Якоби в том и только в том случае, если существует прямоугольник Q с базой σ и геодезическими продольными линиями, ассоциированный с полем V.

Доказательство. Если Q — такой прямоугольник, то якобиевость поля V — это фактически следствие леммы 2, поскольку (в) — это уравнение Якоби, только в R^2. Действительно, $V(t)=dQ(D_2(t, c))$, $\sigma_*(t)=dQ(D_1(t, c))$, поэтому, рассматривая $\sigma(t)$ как отображение $R^d\to M_{\sigma(t)}$, имеем

$$\begin{aligned}
R_{V\sigma_*}\sigma_* &= -\bar\sigma\Phi(\bar V, \bar\sigma_*)\bar\sigma^{-1}(\sigma_*) && (6.1.5)\\
&= -\bar\sigma\Phi^Q(D_2, D_1)\,\omega^Q(D_1)\circ j_c && [j_c(t)=(t, c)]\\
&= \bar\sigma D_1^2\omega^Q(D_2)\circ j_c && [(\text{в}),\ \text{лемма } 2]\\
&= V''.
\end{aligned}$$

С другой стороны, если V — поле Якоби, то, в силу предложения 2, достаточно найти прямоугольник с продольными геодезическими и ассоциированным (вдоль σ) векторным полем W, таким, что $W(0)=V(0)$ и $W'(0)=V'(0)$, так как тогда W будет полем Якоби, ввиду только что доказанного, и потому, в силу единственности, всюду совпадающим с V.

Пусть γ — такая кривая, что $\gamma_*(0)=V(0)$, и $\bar{\gamma}$ — подъем γ, начинающийся в $f=(\sigma(0); f_1, \ldots, f_d) \in F(M)$, так что $\bar{\gamma}(t)=(\gamma(t); f_1(t), \ldots, f_d(t))$. Пусть U — кривая над γ в $T(M)$, $U(t)=\sum h_i(t) f_i(t)$, для которой $U(0)=\sigma_*(0)$ и $\sum h_i'(0) f_i = V'(0)$. Определим теперь прямоугольник Q, положив

$$Q(s, t)=\exp_{\gamma(t)} sU(t).$$

Очевидно, продольные линии в Q геодезические, поскольку при фиксированном t мы как раз получаем экспоненциальный образ луча. Далее, так как $U(0)=\sigma_*(0)$, то луч, соответствующий $t=0$, принадлежит σ, поэтому σ — база прямоугольника Q. При $s=0$ получается γ, поэтому ассоциированное векторное поле W удовлетворяет условию $W(0)=\gamma_*(0)=V(0)$. Таким образом, остается только проверить, что $W'(0)=V'(0)$.

Далее, Q удовлетворяет условию леммы 2, поэтому, в силу (a), $D_1\omega^Q(D_2)=D_2\omega^Q(D_1)+\varphi^Q(D_2)\omega^Q(D_1)$. Но $\bar{\gamma}$ горизонтальна, поэтому $\varphi^Q(D_2(0, t))=\varphi(\bar{\gamma}_*(t))=0$. Кроме того, $\bar{\gamma}(t)\omega^Q(D_1(0, t))$ — касательная к продольной кривой на высоте t, совпадающей с $U(t)$ по определению Q. Таким образом, при $t=0$

$$\begin{aligned} W'(0) &= f(D_1\omega^Q(D_2)(0, 0)) = \\ &= f(D_2\omega^Q(D_1)(0, 0)) = \\ &= f(h'(0)) \qquad\qquad (h(t)=(h_1(t), \ldots, h_d(t))) \\ &= V'(0). \quad \text{Ч. Т. Д.} \end{aligned}$$

Применим теперь полученный результат к случаю, когда $V(0)=0$ и Q вырожденно при $s=0$, т. е. γ — постоянная кривая. Тогда отображение Q можно пропустить через $M_m (m = \sigma(0))$, т. е. $Q = \exp_m \circ S$, где S — прямоугольник в M_m. Тогда наше якобиево поле возникает как образ при $d\exp_m$ векторного поля вдоль луча ρ в M_m, который отображением $\exp_m$ переводится в σ. Мы можем считать U линейным по t:

$$U(t) = \sigma_*(0) + tV'(0),$$

что соответствует равенству

$$S(s, t) = s\sigma_*(0) + stV'(0).$$

Линейно однородное векторное поле вдоль луча ρ в M_m — это кривая X над ρ в $T(M_m)$, для которой $X(0) = 0$ и $X'' = 0$ (дифференцирование возможно, поскольку M_m — линейное пространство).

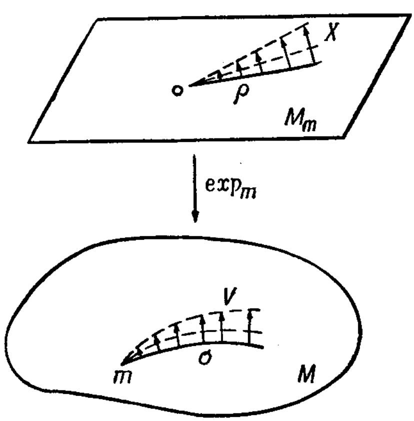

Рис. 32.

Очевидно, что для любого $x \in (M_m)_0$ существует единственное линейное однородное векторное поле, такое, что $X'(0) = x$. Из определения прямоугольника S мы получаем

Следствие. Если V — поле Якоби вдоль $\sigma = \exp_m \circ \rho$, обращающееся в нуль в точке m, и X — такое линейное однородное векторное поле вдоль ρ, что $V'(0) = d \exp_m X'(0)$, то

$$V = d \exp_m X.$$

Нам остается сравнить рост X в «плоском» пространстве M_m с ростом V в M. Это сравнение использует кривизну, поэтому, согласно теореме 1, мы получим соотношение между кривизной и поведением близких геодезических. Метрика на M_m индуцируется скалярным произведением, так что M_m изометрично R^d, например, относительно $f \in F(M)$. Отметим кстати, что X — поле Якоби вдоль геодезической ρ в M_m.

Введем обозначения:

$$W = \rho_*, \quad U = \sigma_*, \quad K(V) = K(U, V)$$

—кривизна сечения, натянутого на V и U, когда они линейно независимы.

Поскольку поведение U-компоненты поля V полностью определено (это линейная функция от U) и поскольку составляющая V, перпендикулярная к U, не зависит от U-компоненты, то в оставшейся части главы предполагается, что $\langle U, V\rangle = 0$. Для удобства предположим также, что $\|U\| = 1$.

Так как $\|V\|'(0) = \|V'\|(0) = \|X\|'$ (см. (а) в доказательстве теоремы 2. Здесь мы, конечно, предполагаем, что $V(0) = 0$), то сравнение роста можно основывать на рассмотрении второй производной, которую определяет

Лемма 3.

$$\|V\|'' = -K(V)\|V\| + \frac{A(V', V)^2}{\|V\|^3}.$$

[Как и при определении $K(P)$, $A(x, y)$ означает площадь параллелограмма, натянутого на x и y.]

Отметим, что если $K(V)$ отрицательно, то $\|V\|''$ положительно.

Доказательство.

$$\|V\|' = \left(\frac{1}{2}\right)\langle V, V\rangle^{-1/2}(\langle V', V\rangle + \langle V, V'\rangle) = \\ = \langle V', V\rangle \|V\|^{-1};$$

$$\|V\|'' = (\langle V'', V\rangle + \langle V', V'\rangle)\|V\|^{-1} - \\ - \langle V', V\rangle \|V\|^{-2}\langle V', V\rangle \|V\|^{-1} = \\ = (\langle V', V'\rangle\langle V, V\rangle - \langle V', V\rangle^2)\|V\|^{-3} + \\ + \langle V'', V\rangle \|V\|^{-1} = \\ = A(V', V)^2\|V\|^{-3} - \langle R_{UV}U, V\rangle \|V\|^{-1} = \\ (V \text{ — поле Якоби}) \\ = A(V', V)^2\|V\|^{-3} - K(V)A(U, V)^2\|V\|^{-1}.$$

Но $A(U, V) = \|V\|$, в силу предположений, что $\langle U, V\rangle = 0$ и $\|U\| = 1$. Ч. Т. Д.

Задача 22. Определить поля Якоби на R^d (см. задачу 7.9).

9.5. Теоремы, включающие кривизну

Мы используем обозначения § 9.4.

Теорема 2. Пусть ρ — луч, проходящий через 0 в M_m.

(I) Если $K(V) \leqslant 0$ вдоль ρ, то $\|V\| = \|d \exp_m X\| \geqslant \|X\|$ вдоль ρ, причем строгое неравенство сохраняется.

(II) Если $K(V') > 0$ в 0, то $\|d \exp_m X\| < \|X\|$ на луче ρ вблизи 0.

Доказательство. Пусть $g = \|V\| - \|X\|$. Тогда поскольку $\|X\|(t) = t\|X'\|$ при $t \geqslant 0$, то очевидно, что g' существует на множестве положительных вещественных чисел всюду, где $\|V\| \neq 0$. Поэтому достаточно показать, что

(а) g имеет нулевую правостороннюю производную в точке 0;

(б) если $K(V) \leqslant 0$, то $g'' \geqslant 0$, причем для строгого неравенства имеет место та же импликация;