Доказательство.

$$\|V\|' = \left(\frac{1}{2}\right)\langle V, V\rangle^{-1/2}(\langle V', V\rangle + \langle V, V'\rangle) = \\ = \langle V', V\rangle \|V\|^{-1};$$

$$\|V\|'' = (\langle V'', V\rangle + \langle V', V'\rangle)\|V\|^{-1} - \\ - \langle V', V\rangle \|V\|^{-2}\langle V', V\rangle \|V\|^{-1} = \\ = (\langle V', V'\rangle\langle V, V\rangle - \langle V', V\rangle^2)\|V\|^{-3} + \\ + \langle V'', V\rangle \|V\|^{-1} = \\ = A(V', V)^2\|V\|^{-3} - \langle R_{UV}U, V\rangle \|V\|^{-1} = \\ (V \text{ — поле Якоби}) \\ = A(V', V)^2\|V\|^{-3} - K(V)A(U, V)^2\|V\|^{-1}.$$

Но $A(U, V) = \|V\|$, в силу предположений, что $\langle U, V\rangle = 0$ и $\|U\| = 1$. Ч. Т. Д.

Задача 22. Определить поля Якоби на R^d (см. задачу 7.9).

9.5. Теоремы, включающие кривизну

Мы используем обозначения § 9.4.

Теорема 2. Пусть ρ — луч, проходящий через 0 в M_m.

(I) Если $K(V) \leqslant 0$ вдоль ρ, то $\|V\| = \|d\exp_m X\| \geqslant \|X\|$ вдоль ρ, причем строгое неравенство сохраняется.

(II) Если $K(V') > 0$ в 0, то $\|d\exp_m X\| < \|X\|$ на луче ρ вблизи 0.

Доказательство. Пусть $g = \|V\| - \|X\|$. Тогда поскольку $\|X\|(t) = t\|X'\|$ при $t \geqslant 0$, то очевидно, что g' существует на множестве положительных вещественных чисел всюду, где $\|V\| \neq 0$. Поэтому достаточно показать, что

(а) g имеет нулевую правостороннюю производную в точке 0;

(б) если $K(V) \leqslant 0$, то $g'' \geqslant 0$, причем для строгого неравенства имеет место та же импликация;

(в) если $K(V')(0)>0$, то $g''<0$ в окрестности нуля в пространстве положительных вещественных чисел.

Для доказательства (а) заметим, что поскольку $X(t)=tX'(t)$, то

$$\|V\|(t)=\|d\exp_m tX'(t)\|=t\,\|d\exp_m X'(t)\|.$$

Деля на t и переходя к пределу при t, стремящемся к $0+$, получаем

$$\|V\|'(0+)=\|d\exp_m X'(0+)\|=\|X'(0+)\|,$$

поскольку $\exp_m$ — изометрия на $(M_m)_0$.

Так как $\|X\|''=0$, то (б) сразу же вытекает из леммы 3.

Для доказательства (в) перепишем формулу для $\|V\|''$ в виде

$$\|V\|''=\left(-K(V)+\frac{A(V',V)^2}{\|V\|^4}\right)\|V\|.$$

Поскольку $\lim K(V)=\lim K(V/t)=K(V'(0))$, в силу непрерывности K, то достаточно показать, что $\lim A(V', V)^2\langle V, V\rangle^{-2}=0$. Для этого положим $Y=V/u$, тогда $Y=d\exp_m X'$, $V'=Y+uY'$, $V''=2Y'+uY''=-R_{UV}U$ (u — координата на R). В силу того, что uY и $Y+uY'$ натягивают параллелограмм той же площади, что uY и uY', и поскольку $A(x, y)^2$ квадратично по каждому переменному,

$$A(V',V)^2\langle V,V\rangle^{-2}=A(uY,uY')^2\langle uY,uY\rangle^{-2}=$$
$$=A(Y,Y')^2\langle Y,Y\rangle^{-2}.$$

Далее, предел Y в нуле есть $d\exp_m X'(0)=V'(0)\neq 0$, тогда как предел Y', как следует из уравнения для V'', равен 0. Таким образом, $A(Y, Y')^2\langle Y, Y\rangle^{-2}$ стремится к нулю. Ч. Т. Д.

Следствие 1. Если кривизна M всюду неположительна, то $\exp_m$ не может уменьшить длину кривых.

Доказательство. В силу (I), поскольку можно брать произвольную геодезическую из m и любое линейное однородное поле, перпендикулярное к ρ, $\exp_m$

не может уменьшить длины векторов, перпендикулярных к ρ. Но $\|d\exp_m U\| = \|U\|$, откуда $\exp_m$ не может уменьшить длину никакого вектора.

Следствие 2. Если $K(V) \leqslant 0$ для всех полей Якоби вдоль σ, то геодезические из m вблизи σ отклоняются от σ больше, чем соответствующие лучи в M_m.

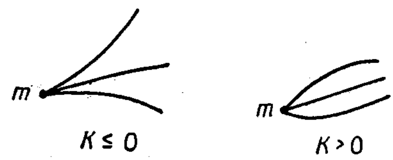

Рис. 33.

Если $K(V) > 0$ вдоль σ вблизи m, то геодезические из m вблизи σ приближаются к σ больше, чем соответствующие лучи в M_m.

Доказательство. Нужно только уточнить терминологию. Пусть ρ, τ — лучи в M_m, проходящие через 0. Пусть S — сфера с центром в 0 и γ — меньшая дуга большого круга в S, пересекающего окружности ρ и τ. Тогда геодезические $\exp_m \circ \rho$ и $\exp_m \circ \tau$ сближаются, если $|\gamma| \geqslant |\exp_m \circ \gamma|$, и расходятся, если $|\gamma| \leqslant |\exp_m \circ \gamma|$. Теперь следствие вытекает из теоремы 2.

Задача 23. С помощью плоской кривизны можно следующим образом сравнивать длины и площади «кругов» в M и в R^2. Пусть x, $y \in M_m$, x, y — ортогональные единичные векторы. Определим C^∞-прямоугольник Q формулой

$$Q(s,\ t) = \exp_m(s(x\cos t + y\sin t)),$$

$0 \leqslant s$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Пусть $K = K(x,\ y)$, а V — трансверсальное векторное поле прямоугольника Q.

(а) Показать, что длину V можно выразить в виде

$$\|V\| = s - \frac{1}{6}Ks^3 = s^4 h(s,\ t),$$

где h принадлежит C^∞ при $s > 0$ и непрерывно в точке $s = 0$.

(б) Пусть $L(s)$ — длина «круга» Q_s. Показать, что $L(s)=2\pi(s-Ks^3/6)+s^4f(s)$, где f — непрерывная функция от s; поэтому

$$K=(3/\pi)\lim_{s\to 0}(2\pi s-L(s))/s^3.$$

(в) Определим $A(s)=\int\limits_0^s L(u)\,du$, «площадь» этого «круга»; вывести формулу

$$K=(12/\pi)\lim_{s\to 0}(\pi s^2-A(s))/s^4.$$

Замечание. Э. Картан обобщил эти формулы на поверхности малых сфер, объемы малых 3-сфер и т. д. [25, стр. 252].

Задача 24. Пусть $M=S^d$ — сфера радиуса r. С помощью задачи 7.12 показать, что «круги радиуса s в S^d» являются кругами радиуса $r\sin s/r$ в R^{d+1}. Вычислить теперь $L(s)$ и доказать, что $K=1/r^2$ для всех плоских сечений.

Задача 25. Исходя из этого, найти следующее явное выражение полей Якоби на S^d: пусть $\gamma(s)$ — геодезическая, s — длина дуги, а x, $y\in S^d_{\gamma(0)}$ — касательные, перпендикулярные к $\gamma_*(0)$. Отождествляя далее касательные к S^d с касательными к R^{d+1}, можно записать

$$x=\sum a_iD_i(\gamma(0)),\qquad y=\sum b_iD_i(\gamma(0)).$$

Показать, что формула для поля Якоби X вдоль γ с $X(0)=x$, $X'(0)=y$ такова:

$$X(s)=\cos s/r\sum a_iD_i(\gamma(s))+\sin s/r\sum b_iD_i(\gamma(s)).$$

Пусть M, $'M$ являются d-мерными римановыми многообразиями, $m\in M$, $'m\in {}'M$, $f=(m, f_1, \ldots, f_d)\in F(M)$, $'f=('m, 'f_1, \ldots, 'f_d)\in F('M)$; положим, как в § 8.1,

$$\theta=\overline{\exp}_f^*\varphi,\qquad '\theta=\overline{\exp}_{'f}^*{}'\varphi,$$

$$\Theta=\overline{\exp}_f^*\Phi,\qquad '\Theta=\overline{\exp}_{'f}^*{}'\Phi,$$

$$\psi=\overline{\exp}_f^*\omega,\qquad '\psi=\overline{\exp}_{'f}^*{}'\omega.$$

Пусть $X \in \mathfrak{o}(d)$; тогда $f \circ (\exp uX) \circ f^{-1}$ — однопараметрическая группа вращений в M_m, порождающая векторное поле $\overline{X}$ на M_m. Взяв $'f$ вместо f, получим аналогичное векторное поле $'\overline{X}$ на $'M_{'m}$. Векторное поле $\overline{X}$ является линейно однородным вдоль всех лучей в M_m и перпендикулярно к ним; кроме того, $(\overline{X} \circ \rho)'(0) = d \exp_m^{-1}(fXf^{-1}(\rho(1)))$.

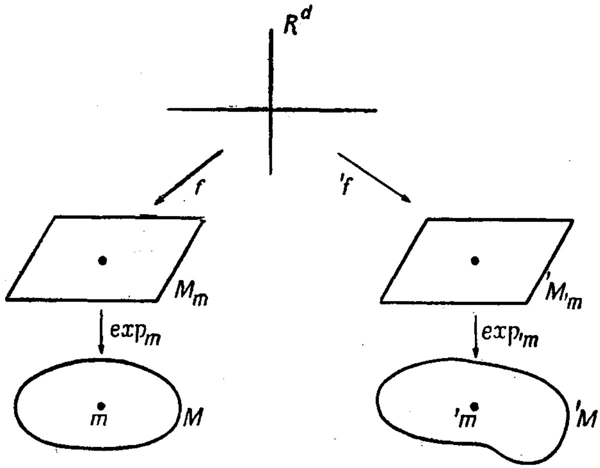

Рис. 34.

Пусть T — радиальное векторное поле, определенное на всем M_m, за исключением 0, и удовлетворяющее равенству $T \circ \rho = U$ (здесь ρ и U такие же, как прежде). Аналогично на $'M_{'m}$ определяется $'T$.

Теорема 3 (Э. Картан). Если для любого x из N, некоторой окрестности нуля в R^d и любого $X \in \mathfrak{o}(d)$ выполняется равенство

$$\Theta(T, \overline{X})(fx) = '\Theta('T, '\overline{X})('fx),$$

то существует окрестность U точки m и изометрия J: $U \to 'M$, такие, что $J(m) = 'm$ и $dJ \circ f = 'f$.

Доказательство. Пусть L — линейное отображение $'ff^{-1}$: $M_m \to 'M_{'m}$. Пусть $\overline{U}$ — окрестность нуля в M_m, на которой $\exp_m$ является диффеоморфизмом и которая содержится в $f(N)$. Положим далее $'U = \exp_{'m} \overline{U}$ и определим J формулой $J = \exp_{'m} \circ L \circ (\exp_m | \overline{U})^{-1}$. Ясно, что $J(m) = 'm$ и $dJ = L$ на M_m, поэтому остается лишь проверить, что J — изометрия.

Очевидно, dJ сохраняет длины радиальных векторов, т. е. $dJ(d\exp_m T) = d\exp_{'m} 'T$. Следовательно, достаточно показать, что dJ сохраняет длины векторов, нормальных к радиальным. Если t — такая касательная к U, то, в силу выбора U, существуют такие $p \in M_m$ и $X \in \mathfrak{o}(d)$, что $d\exp_m \overline{X}(p) = t$. Кроме того, $dJ(t) = d\exp_{'m} '\overline{X}(Lp)$. Следовательно, по формуле (б), стр. 185, $\|t\| = \|\psi(\overline{X})(p)\|$, $\|dJ(t) = \|'\psi('\overline{X})(Lp)\|$, и потому достаточно доказать, что при любом X

$$\psi(\overline{X}) = '\psi('\overline{X}) \circ L.$$

А теперь заметим следующее:

(а) ψ и $f^{-1} \circ d\exp_m$ совпадают на $(M_m)_0$, и аналогичное утверждение имеет место для $'\psi$;

(б) $\psi(T) = '\psi('T) \circ L$;

(в) $\psi(\overline{X})(0) = '\psi('\overline{X})(L(0)) = 0$.

Для каждого луча ρ в M_m

(г) $$(\psi(\overline{X}) \circ \rho)'(0) = \psi((\overline{X} \circ \rho)'(0)) = Xf^{-1}\rho(1) = \\ = ('\psi('\overline{X}) \circ L \circ \rho)'(0),$$

в силу (а) и замечания перед формулировкой теоремы, описывающего $(\overline{X} \circ \rho)'(0)$.

В силу (в) и (г), $\psi(\overline{X})$ и $'\psi('\overline{X}) \circ L$ удовлетворяют одинаковым начальным условиям вдоль любого луча. Они окажутся одинаковыми, если удастся показать, что совпадают их вторые производные. Но лучи служат интегральными кривыми поля T, поэтому нужно показать, что совпадают $T^2\psi(\overline{X})$ и $T^2('\psi('\overline{X}) \circ L$. Опуская пока доказательство того, что $T^2\psi(\overline{X}) = \Theta(T, \overline{X})\psi(T)$, имеем

$$\begin{aligned} T^2('\psi('\overline{X}) \circ L) &= ('T^2\,'\psi('\overline{X})) \circ L = \\ &= ('\Theta('T, '\overline{X})\,'\psi('T)) \circ L = \\ &= ('\Theta('T, '\overline{X}) \circ L)('\psi('T) \circ L) = \\ &= \Theta(T, \overline{X})\psi(T), \text{ по предположению и (б),} \\ &= T^2\psi(\overline{X}). \end{aligned}$$

Следующая лемма завершает доказательство.

Лемма 4.

(а′) $T\psi(\bar{X}) = \bar{X}\psi(T) + \theta(\bar{X})\psi(T)$,

(б′) $T\theta(\bar{X}) = \Theta(T, \bar{X})$,

(в′) $T^2\psi(\bar{X}) = \Theta(T, \bar{X})\psi(T)$.

Доказательство с точностью до очевидной замены символов совпадает с доказательством леммы 2. Требуется только проверить, что $[T, \bar{X}]=0$. Это равенство вытекает из геометрической интерпретации скобки (теорема 1.4), поскольку в каком бы порядке ни производились следующие операции:

смещение на данное расстояние вдоль луча (следуя интегральной кривой поля T),

вращение около начала (следуя интегральной кривой поля $\bar{X}$),

получается одинаковый результат.

Следствие. Если M — плоское d-мерное риманово многообразие, т. е. $K(P)=0$ для всех плоских сечений P на M, то M локально изометрично R^d.

В дальнейшем многообразия предполагаются связными.

Теорема 4. Пусть M — полное риманово многообразие, $m \in M$. Предположим, что $d\exp_m$ нигде не вырожденно. Тогда $\exp_m$ является накрывающим отображением.

Доказательство. Определим сначала новую метрику на M_m [т. е. на $T(M_m)$], снося метрику на M посредством $d\exp_m$. Поскольку геодезические, выходящие из $0 \in M_m$, являются прямыми с линейной параметризацией, то из теоремы 8.5 следует, что M_m полно в этой метрике.

Поэтому, чтобы доказать теорему, достаточно проверить, что если $F\colon N \to M$ — локальный диффеоморфизм, dF всюду является изометрией и N полно, то F — накрывающее отображение. Для этого нам нужно показать, что для любого $m \in M$ существует окрестность U точки m, ровно накрываемая отображением F, т. е. $F^{-1}(U)$ распадается на непересекающиеся множества U_i, каждое из которых диффеоморфно U относительно F.

Зафиксируем $m \in M$. Пусть O — шар с центром m, диффеоморфный шару O' радиуса r с центром $0(m)$ в M_m. Пусть U — шар радиуса $r/2$ с центром m, $F^{-1}(m) = \{u_i\}$ и U_i — шар радиуса $r/2$ с центром u_i. Для доказательства того, что это ровное накрытие, нужно проверить следующее:

(1) $F|_{u_i}$ взаимно однозначно,

(2) $F^{-1}(U)$ есть объединение множеств U_i,

(3) из $u_i \neq u_j$ следует, что U_i и U_j не пересекаются.

Доказательство. (1) Пусть U' — шар радиуса $r/2$ с центром $0(m)$ в M_m, и пусть dF_{u_i} отображает N_{u_i} изометрически на M_m. Тогда из равенства $\exp_m \circ dF_{u_i} = F \circ \exp_{u_i}$ выводим, что $U_i = \exp_{u_i} \circ dF_{u_i}^{-1}(U')$ и $F|U_i$ взаимно однозначно, поскольку dF_{u_i} — изометрия.

(2) Пусть $u' \in F^{-1}(U)$. Мы хотим показать, что существует i, такое, что $u' \in U_i$. Пусть $m' = F(u')$ и σ — геодезический сегмент длины $k < r/2$, соединяющий m' с m. Локально σ можно поднять до геодезической $\bar{\sigma}$, выходящей из u'. Поскольку N полно, то $\bar{\sigma}$ можно продолжить до геодезической длины k, а так как F — локальная изометрия, то $F \circ \bar{\sigma}$ — геодезическая и потому совпадает с σ. Но тогда конечная точка $\bar{\sigma}$ (обозначим ее через $\bar{n}$) переходит в конечную точку σ, т. е. $F(\bar{n}) = m$. Следовательно, существует i, такое, что $u_i = \bar{n}$, и, значит, $u' \in U_i$. Тем самым (2) доказано.

(3) Предположим, что $u_i \neq u_j$ и $u' \in U_i \cap U_j$. Тогда

$$\rho(u', u_i) < r/2, \quad \rho(u', u_j) < r/2, \quad \text{откуда } \rho(u_i, u_j) < r.$$

Повторяя доказательство (1), находим, что F взаимно однозначно на шаре радиуса r с центром u_i, что противоречит равенству $F(u_i) = F(u_j)$. Тем самым доказаны утверждение (3) и теорема 4.

Следствие 1. Пусть M — полное односвязное d-мерное плоское риманово многообразие. Тогда M изометрично R^d.

Доказательство. В силу следствия теоремы 3, $\exp_m$: $M_m \to M$ является локальной изометрией при любом $m \in M$, и, значит, по теореме 4, является накрывающим отображением, которое взаимно однозначно, поскольку M односвязно.

Следствие 2 (Адамар — Картан). Пусть M — полное односвязное d-мерное риманово многообразие с неположительной кривизной всех плоских сечений. Тогда M диффеоморфно R^d.

Доказательство вытекает непосредственно из теорем 2 и 4.

Задача 26. Предположим, что N, M — римановы многообразия, N полно и φ: $N \to M$ — регулярное отображение, локально не уменьшающее расстояния. Показать, что φ — накрывающее отображение, если $\dim N = \dim M$.

Задача 27. Пусть M и N — полные многообразия, имеющие одинаковую постоянную кривизну. (Такие многообразия называются *пространственными формами.*)

(а) Показать, что форму кривизны можно записать в виде $\Phi = k\omega\omega^t$, где ω^t — транспозиция ω.

(б) Показать, что M и N локально изометричны.

(в) Если M и N односвязны и $k \leqslant 0$, то они изометричны (M и N связны).

(г) Если $k = a^2 > 0$, то сфера радиуса π/a в M_m посредством $\exp_m$ отображается в точку, причем $\exp_m$ регулярно внутри этой сферы. Построить риманово накрывающее отображение сферы S^d радиуса $1/a$ в M, так что если M односвязно, то оно изометрично S^d.