ГЛАВА 10

Погружения и вторая фундаментальная форма

В этой главе мы рассматриваем погружение многообразий в риманово многообразие, а также индуцированную риманову связность на погруженном многообразии. Определяется вторая фундаментальная форма, которая связывается с кривизной и параллельным переносом; доказывается теорема Синга и ставится проблема существования погружений. Глава заканчивается изучением гиперповерхностей [22, 33, 85, 90].

10.1. Определения

Пусть N есть f-мерное риманово многообразие с метрикой $\langle\ ,\ \rangle$ M является d-мерным многообразием и $e=f-d>0$.

Погружением M в N называется такое C^∞-отображение I: $M\to N$, при котором dI — взаимно однозначное отображение на каждом M_m. Напомним, что I — вложение, если оно взаимно однозначно (§ 1.5).

Индуцированная риманова метрика (или *первая фундаментальная форма погружения*) — это форма $\langle\ ,\ \rangle'=\langle dI, dI\rangle$; она превращает M в риманово многообразие.

С этого момента мы будем предполагать, что I обозначает погружение и что M наделено индуцированной римановой структурой, а также связностью.

Поскольку N и M — римановы многообразия, то им соответствуют ассоциированные расслоения ортонормальных базисов $F(N)$ и $F(M)$. Рассмотрим еще два расслоения. Первое — $F_M(N)$, главное расслоение над M, индуцированное I и $F(N)$; таким образом,

$$F_M(N)=\{(m, b)\,|\,I(m)=\pi_N(b),\ m\in M,\ b\in F(N)\};$$

опустив символ $I(m)$ в выражении $b=(I(m), e_1, \ldots, e_f)$, будем писать $(m, b)=(m, e_1, \ldots, e_f)$.

Группа $O(f)$ действует на R^f и является группой расслоений $F(N)$ и $F_M(N)$. Разложим R^f в прямую сумму R^d+R^e и рассмотрим следующие подгруппы в $O(f)$:

$$O(d)=\{g\in O(f)\,|\,gR^d\subset R^d,\ g \text{ тождественно на } R^e\},$$
$$O(e)=\{g\in O(f)\,|\,g \text{ тождественно на } R^d,\ gR^e\subset R^e\}.$$

Пусть $\mathfrak{o}(f)$, $\mathfrak{o}(d)$, $\mathfrak{o}(e)$ — соответствующие алгебры Ли; тогда $\mathfrak{o}(f)=\mathfrak{o}(d)+\mathfrak{o}(e)+\mathfrak{f}$, где

$$\mathfrak{f}=\{X\in\mathfrak{o}(f)\,|\,XR^d\subset R^e \quad \text{и} \quad XR^e\subset R^d\}.$$

Заметим, что $O(d)\times O(e)\subset O(f)$ — подгруппа и что

$$\mathrm{Ad}\,(O(d)\times O(e))\,\mathfrak{f}\subset\mathfrak{f}.$$

Пусть $\perp(M)$ и $T(M)$ — нормальное и касательное расслоения над M соответственно со слоями $M_m^{\perp}$ и M_m. Определим теперь

$$F(N, M)=\{b\in F_M(N)\,|\,b(R^d)=dIM_m,\ m=\pi(b)\}, \quad (\S\,3.3)$$

т. е.

$$F(N, M)=\{(m, e_1, \ldots, e_f)\in F_M(N)\,|\,e_1, \ldots, e_d\in M_m,$$
$$e_{d+1}, \ldots, e_f\in M_m^{\perp}\}.$$

Расслоение $F(N, M)$ называется расслоением *адаптированных ортонормальных базисов* над M. Оно реализует приведение группы $O(f)$ расслоения $F_M(N)$ к подгруппе $O(d)\times O(e)$. Возникает коммутативная диаграмма,

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[dr, "O(d)"', "\pi_0"] & F(N, M) \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "r"] \arrow[d, "O(d)\times O(e)"', "\pi'"] & F_M(N) \arrow[r, "I'"] \arrow[dl, "O(f)"', "\pi"] & F(N) \arrow[d, "O(f)"', "\pi"] \\
& M \arrow[rr, "I"] & & N
\end{tikzcd}$$

где s — проекция на первые d касательных.

Задача 1. Пусть S — векторное пространство симметрических $d\times d$-матриц над R. Тогда $O(d)$ действует в S как сужение присоединенного представления группы $Gl(d, R)$: $\mathrm{Ad}\,T(X)=TXT^{-1}$, где $T\in O(d)$, $X\in S$. Пусть I_r — единичная $r\times r$-матрица, положим

$$X_r=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{d-r}\end{pmatrix}.$$

(а) Пусть M — орбита X_r под действием $O(d)$. Показать, что группой изотропии, оставляющей матрицу X_r неподвижной, служит $O(r)\times O(d-r)$, и потому M диффеоморфно $G_{d,r}$.

(б) Если ввести метрику $\langle\ ,\ \rangle$ на S вида $\langle X, X'\rangle = \mathrm{tr}\,XX'$, то S изометрично плоскому R^D-пространству, $D=d(d+1)/2$, на котором элементы группы $O(d)$ действуют как изометрии. Таким образом, метрика, индуцированная на M, инвариантна относительно $O(d)$, так что M оказывается римановым симметрическим пространством.

Задача 2. Пусть $O(d)$ действует в S так же, как в задаче 1, и $X\in S$ имеет n различных характеристических чисел с кратностями $d_1, \ldots, d_n$. Показать, что орбита X является многообразием флагов $Fl(d; d_1, \ldots, d_n)$ (см. задачу 7.25). Найти соотношение между скалярными произведениями на блоках m_{ij} и характеристическими значениями X.

10.2. Связности

В дальнейшем мы рассмотрим связность на подрасслоении $F(N, M)$, индуцированную связностью на $F_M(N)$. Вообще говоря, горизонтальное распределение на $F_M(N)$ не будет касательным к $F(N, M)$, и потому его следует в некотором смысле «спроектировать» на $F(N, M)$. Мы опишем процедуру этого «проектирования», используя двойственную формулировку для связности.

Пусть (P, G, M) — главное расслоение над многообразием M, и пусть φ — форма связности $\varphi\colon T(P)\to\mathfrak{g}$. Пусть $i\colon B\subset P$, $H\subset G$ и (B, H, M) — подрасслоение расслоения (P, G, M), представляющее приведение G к H.