Задача 1. Пусть S — векторное пространство симметрических $d\times d$-матриц над R. Тогда $O(d)$ действует в S как сужение присоединенного представления группы $Gl(d, R)$: $\mathrm{Ad}\, T(X)=TXT^{-1}$, где $T\in O(d)$, $X\in S$. Пусть I_r — единичная $r\times r$-матрица, положим

$$X_r=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{d-r} \end{pmatrix}.$$

(а) Пусть M — орбита X_r под действием $O(d)$. Показать, что группой изотропии, оставляющей матрицу X_r неподвижной, служит $O(r)\times O(d-r)$, и потому M диффеоморфно $G_{d,r}$.

(б) Если ввести метрику $\langle\ ,\ \rangle$ на S вида $\langle X, X'\rangle = \mathrm{tr}\, XX'$, то S изометрично плоскому R^D-пространству, $D=d(d+1)/2$, на котором элементы группы $O(d)$ действуют как изометрии. Таким образом, метрика, индуцированная на M, инвариантна относительно $O(d)$, так что M оказывается римановым симметрическим пространством.

Задача 2. Пусть $O(d)$ действует в S так же, как в задаче 1, и $X\in S$ имеет n различных характеристических чисел с кратностями $d_1, \ldots, d_n$. Показать, что орбита X является многообразием флагов $Fl(d; d_1, \ldots, d_n)$ (см. задачу 7.25). Найти соотношение между скалярными произведениями на блоках m_{ij} и характеристическими значениями X.

10.2. Связности

В дальнейшем мы рассмотрим связность на подрасслоении $F(N, M)$, индуцированную связностью на $F_M(N)$. Вообще говоря, горизонтальное распределение на $F_M(N)$ не будет касательным к $F(N, M)$, и потому его следует в некотором смысле «спроектировать» на $F(N, M)$. Мы опишем процедуру этого «проектирования», используя двойственную формулировку для связности.

Пусть (P, G, M) — главное расслоение над многообразием M, и пусть φ — форма связности φ: $T(P)\to\mathfrak{g}$. Пусть i: $B\subset P$, $H\subset G$ и (B, H, M) — подрасслоение расслоения (P, G, M), представляющее приведение G к H.

Тогда $i^*\varphi$ является 1-формой на B со значениями в $\mathfrak{g}$ и потому, вообще говоря, не является формой связности на B. Однако если $\mathfrak{k}$ — векторное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, инвариантное относительно $\mathrm{Ad}\, H$, т. е. $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{h}$, $\mathrm{Ad}\, H(\mathfrak{k})\subset\mathfrak{k}$, то проекция $i^*\varphi$ в $\mathfrak{h}$ при этом разложении $\mathfrak{g}$ является формой связности на B (см. задачу 5.5).

Задача 3. Проверить, что при указанном условии проекция $i^*\varphi$ в $\mathfrak{h}$ является формой связности.

Пусть φ — форма римановой связности на $F(N)$, ω — форма смещения; обозначим теми же символами эти формы, снесенные посредством I' на $F_M(N)$, так что φ — форма связности на $F_M(N)$ и $d\omega=-\varphi\omega$ — первое структурное уравнение.

Заменяя $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ на $\mathfrak{o}(f)$, $\mathfrak{o}(d)+\mathfrak{o}(e)$, $\mathfrak{k}$, найдем, что проекция $r^*\varphi$ на $\mathfrak{o}(d)+\mathfrak{o}(e)$ является формой связности на $F(N, M)$, обозначаемой, естественно, через $\varphi_d+\varphi_e$. В силу эквивариантности, это вновь дает форму связности ψ на $F_M(N)$; поэтому можно рассмотреть форму разности $\varphi-\psi$, которая горизонтальна и эквивариантна. Но тогда форма $\tau=r^*\varphi-(\varphi_d+\varphi_e)$ тоже оказывается горизонтальной и эквивариантной. Форма τ фактически и есть вторая фундаментальная форма погружения, однако формальное определение будет дано в терминах некоторого связанного с этим объекта.

Воспользуемся формой φ, чтобы определить связность на $F(M)$. Заметим, что φ_d удовлетворяет следующим уравнениям:

(1) $\varphi_d(ds^{-1}(0))=0$,

(2) $R_g{}^*\varphi_d=\varphi_d$ для $g\in I_d\cdot O(e)$

Из (1) и (2) следует, что на $F(M)$ существует единственная форма φ_0, такая, что

$$\varphi_d=\varphi_0\circ ds.$$

Легко проверить, что φ_0 — форма связности на $F(M)$.

Изучим теперь структурные уравнения всех этих связностей. Отметим прежде всего, что если $b\in F(N, M)$, то

$$d\pi'(F(N, M)_b)\subset M_{\pi'(b)}$$

и

$$b^{-1}(M_{\pi'(b)}) \subset R^d.$$

Следовательно, если положить $\omega' = r^*\omega$, то

$$\omega'(F(N, M)_b) = b^{-1}(d\pi'(F(N, M)_b)) \subset R^d,$$

где ω — форма смещения на $F(N)$, снесенная на $F_M(N)$. Отсюда $d\omega' = d(r^*\omega) = r^*d\omega$ также принимает свои значения в R^d и $\varphi_e\omega' = 0$. Поэтому структурное уравнение для φ на $F_M(N)$ дает

$$d\omega' = r^*d\omega = -r^*\varphi\omega = -(\varphi_d + \varphi_e + \tau)\omega' = -\varphi_d\omega' - \tau\omega'.$$

Далее, формы $d\omega'$ и $-\varphi_d\omega'$ являются R^d-значными, тогда как форма $\tau\omega'$ является R^e-значной ввиду R^d-значности ω'. Следовательно,

$$d\omega' = -\varphi_d\omega', \quad \tau\omega' = 0.$$

В частности, связность $\varphi_d + \varphi_e$ имеет нулевое кручение. Кроме того, поскольку $\omega' = s^*\omega_0$, где ω_0 — форма смещения на $F(M)$, то структурным уравнением для φ_0 будет

$$d\omega_0 = -\varphi_0\omega_0,$$

так что φ_0 имеет нулевое кручение. Итак, φ_0 — единственная риманова связность на $F(M)$.

Задача 4. Доказать, что $\omega' = s^*\omega_0$.

Задача 5. На $F(N)$ определим риманову метрику, потребовав, чтобы базисные и фундаментальные векторные поля E_i и F_{ij} были ортонормальны; тогда эта метрика индуцирует некоторую метрику на $F_M(N)$.

(а) Показать, что подпространство $dI'(F(N, M)_b) \subset$

$\subset F_M(N)_b$ ортогонально той части вертикального пространства, которая соответствует $\mathfrak{k}$, т. е. $\lambda\mathfrak{k}$.

(б) Показать, что горизонтальное пространство связности ψ в точке $b \in F_M(N)$ является ортогональной проекцией горизонтального пространства связности φ на $dI'(F(N, M)_b)$.

Полученный результат позволяет описать связность ψ с геометрической точки зрения: это ближайшая к φ связность, при которой параллельный перенос преобразует адаптированные ортонормальные базисы в адаптированнные.

10.3. Кривизна

Используя теперь для φ другое структурное уравнение, мы свяжем кривизну индуцированной структуры на M с кривизной на N.

Отметим следующие очевидные факты:

(1) $[\varphi_d, \varphi_e]=0$,

(2) $[\varphi_d+\varphi_e, \tau]$ $\mathfrak{k}$-значно,

(3) $[\varphi_d, \varphi_d]$ $\mathfrak{o}(d)$-значно,

(4) $[\varphi_d, \varphi_e]$ $\mathfrak{o}(e)$-значно,

(5) $[\tau, \tau]$ $\mathfrak{o}(d)+\mathfrak{o}(e)$-значно, $[\tau, \tau]=[\tau, \tau]_d+[\tau, \tau]_e$.

Пусть теперь Φ — форма кривизны связности φ на $F_M(N)$; имеем $\Phi'=r^*\Phi=\Phi_d+\Phi_e+\Gamma$, где Γ принимает значения в $\mathfrak{k}$. Тогда структурное уравнение

$$d\varphi=-\frac{1}{2}[\varphi, \varphi]+\Phi$$

дает

$$d\varphi_d=-\frac{1}{2}[\varphi_d, \varphi_d]-\frac{1}{2}[\tau, \tau]_d+\Phi_d,$$

$$d\varphi_e=-\frac{1}{2}[\varphi_e, \varphi_e]-\frac{1}{2}[\tau, \tau]_e+\Phi_e,$$

$$d\tau=-[\varphi_d+\varphi_e, \tau]+\Gamma.$$

В частности, если Φ_0 — форма кривизны связности φ_0 на $F(M)$, то

$$\Phi_0\circ ds=\Phi_d-\frac{1}{2}[\tau, \tau]_d.$$

Таким образом, эти кривизны связаны посредством формы разности τ.

Точнее, пусть x, y — ортонормальные касательные в M_m, $b\in F(N, M)$ и $\pi'(b)=m$. Пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$ — горизонтальные подъемы x, y в b, так что $\tilde{x}=ds(\bar{x})$, $\tilde{y}=ds(\bar{y})$ являются φ_0-горизонтальными подъемами x и y в $s(b)\in F(M)$. Обозначим через $K_0(x, y)$ и $K(x, y)$