Полученный результат позволяет описать связность ψ с геометрической точки зрения: это ближайшая к φ связность, при которой параллельный перенос преобразует адаптированные ортонормальные базисы в адаптированнные.

10.3. Кривизна

Используя теперь для φ другое структурное уравнение, мы свяжем кривизну индуцированной структуры на M с кривизной на N.

Отметим следующие очевидные факты:

(1) $[\varphi_d, \varphi_e]=0$,
(2) $[\varphi_d+\varphi_e, \tau]$ $\mathfrak{k}$-значно,
(3) $[\varphi_d, \varphi_d]$ $\mathfrak{o}(d)$-значно,
(4) $[\varphi_d, \varphi_e]$ $\mathfrak{o}(e)$-значно,
(5) $[\tau, \tau]$ $\mathfrak{o}(d)+\mathfrak{o}(e)$-значно, $[\tau, \tau]=[\tau, \tau]_d+[\tau, \tau]_e$.

Пусть теперь Φ — форма кривизны связности φ на $F_M(N)$; имеем $\Phi'=r^*\Phi=\Phi_d+\Phi_e+\Gamma$, где Γ принимает значения в $\mathfrak{k}$. Тогда структурное уравнение

$$d\varphi=-\frac{1}{2}[\varphi, \varphi]+\Phi$$

дает

$$d\varphi_d=-\frac{1}{2}[\varphi_d, \varphi_d]-\frac{1}{2}[\tau, \tau]_d+\Phi_d,$$
$$d\varphi_e=-\frac{1}{2}[\varphi_e, \varphi_e]-\frac{1}{2}[\tau, \tau]_e+\Phi_e,$$
$$d\tau=-[\varphi_d+\varphi_e, \tau]+\Gamma.$$

В частности, если Φ_0 — форма кривизны связности φ_0 на $F(M)$, то

$$\Phi_0\circ ds=\Phi_d-\frac{1}{2}[\tau, \tau]_d.$$

Таким образом, эти кривизны связаны посредством формы разности τ.

Точнее, пусть x, y — ортонормальные касательные в M_m, $b\in F(N, M)$ и $\pi'(b)=m$. Пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$ — горизонтальные подъемы x, y в b, так что $\tilde{x}=ds(\bar{x})$, $\tilde{y}=ds(\bar{y})$ являются φ_0-горизонтальными подъемами x и y в $s(b)\in F(M)$. Обозначим через $K_0(x, y)$ и $K(x, y)$

кривизны сечения, порожденного x и y в M и N соответственно. Тогда

$$K_0(x,\ y)=\langle R_{0xy}x,\ y\rangle=$$
$$=-\langle s(b)\Phi_0(\tilde{x},\ \tilde{y})(s(b))^{-1}x,\ y\rangle=$$
$$=-\langle s(b)\Phi_0(ds(\bar{x}),\ ds(\bar{y}))(s(b))^{-1}x,\ y\rangle=$$
$$=-\langle b\Phi_d(\bar{x},\ \bar{y})b^{-1}x,\ y\rangle+\frac{1}{2}\langle b[\tau,\tau](\bar{x},\bar{y})b^{-1}x,y\rangle.$$

Но $(\Phi_e(\bar{x},\ \bar{y})+\Gamma(\bar{x},\ \bar{y}))b^{-1}x\in R^e$, так как $b^{-1}x\in R^d$. Поэтому, поскольку $\langle R^d,\ R^e\rangle=0$, имеем

$$\langle b\Phi_d(\bar{x},\ \bar{y})b^{-1}x,\ y\rangle=\langle b\Phi'(\bar{x},\ \bar{y})b^{-1}x,\ y\rangle=-K(x,\ y),$$

откуда

$$K_0(x,\ y)=K(x,\ y)+\frac{1}{2}\langle b[\tau,\ \tau](\bar{x},\ \bar{y})b^{-1}x,\ y\rangle,$$

где

$$[\tau,\ \tau](\bar{x},\ \bar{y})=2[\tau(\bar{x}),\ \tau(\bar{y})].$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}[\tau,\ \tau](\bar{x},\ \bar{y})b^{-1}x=[\tau(\bar{x}),\ \tau(\bar{y})]\,\omega'(\bar{x}).$$

Последнему выражению с помощью второй фундаментальной формы будет придан геометрический смысл.

10.4. Вторая фундаментальная форма

Пусть $z\in M_m^{\perp}$. *Вторая фундаментальная форма в точке* z является билинейной формой H_z на M_m:

$$H_z(x,\ y)=-\langle z,\ b\tau(\bar{x})\,\omega'(\bar{y})\rangle,$$

где $x,\ y\in M_m$, $b\in(\pi')^{-1}(m)$, а $\bar{x}$, $\bar{y}$ — подъем в b. Форма $H_z(x,\ y)$, очевидно, не зависит от допущенного произвола и является симметрической, поскольку $\tau\omega'=0$. Поэтому ей соответствует симметрическое преобразование S_z в M_m

$$H_z(x,\ y)=\langle S_zx,\ y\rangle.$$