кривизны сечения, порожденного x и y в M и N соответственно. Тогда

$$\begin{aligned}K_0(x, y) &= \langle R_{0xy}x, y\rangle = \\ &= -\langle s(b)\Phi_0(\tilde{x}, \tilde{y})(s(b))^{-1}x, y\rangle = \\ &= -\langle s(b)\Phi_0(ds(\bar{x}), ds(\bar{y}))(s(b))^{-1}x, y\rangle = \\ &= -\langle b\Phi_d(\bar{x}, \bar{y})b^{-1}x, y\rangle + \frac{1}{2}\langle b[\tau, \tau](\bar{x}, \bar{y})b^{-1}x, y\rangle.\end{aligned}$$

Но $(\Phi_e(\bar{x}, \bar{y}) + \Gamma(\bar{x}, \bar{y}))b^{-1}x \in R^e$, так как $b^{-1}x \in R^d$. Поэтому, поскольку $\langle R^d, R^e\rangle = 0$, имеем

$$\langle b\Phi_d(\bar{x}, \bar{y})b^{-1}x, y\rangle = \langle b\Phi'(\bar{x}, \bar{y})b^{-1}x, y\rangle = -K(x, y),$$

откуда

$$K_0(x, y) = K(x, y) + \frac{1}{2}\langle b[\tau, \tau](\bar{x}, \bar{y})b^{-1}x, y\rangle,$$

где

$$[\tau, \tau](\bar{x}, \bar{y}) = 2[\tau(\bar{x}), \tau(\bar{y})].$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}[\tau, \tau](\bar{x}, \bar{y})b^{-1}x = [\tau(\bar{x}), \tau(\bar{y})]\,\omega'(\bar{x}).$$

Последнему выражению с помощью второй фундаментальной формы будет придан геометрический смысл.

10.4. Вторая фундаментальная форма

Пусть $z \in M_m^{\perp}$. *Вторая фундаментальная форма в точке* z является билинейной формой H_z на M_m:

$$H_z(x, y) = -\langle z, b\tau(\bar{x})\omega'(\bar{y})\rangle,$$

где $x, y \in M_m$, $b \in (\pi')^{-1}(m)$, а $\bar{x}$, $\bar{y}$ — подъем в b. Форма $H_z(x, y)$, очевидно, не зависит от допущенного произвола и является симметрической, поскольку $\tau\omega' = 0$. Поэтому ей соответствует симметрическое преобразование S_z в M_m

$$H_z(x, y) = \langle S_z x, y\rangle.$$

Пусть теперь T — поле линейных преобразований, ассоциированное с формой разности τ, т. е. если $x \in M_m$, $y \in N_{l(m)}$, то

$$T_x y = b\tau(\bar{x}) b^{-1}(y),$$

где $b \in (\pi')^{-1}(m) \subset F(N, M)$ и $\bar{x}$ — подъем x в b. В частности, $T_x(M_m) \subset M_m{}^{\perp}$, $T_x(M_m{}^{\perp}) \subset M_m$. Если $y \in M_m$, то $T_x y = b\tau(\bar{x})\omega'(\bar{y})$. Далее,

$$\begin{aligned} \langle S_z x, y\rangle = H_z(x, y) &= \\ &= -\langle z, b\tau(\bar{x})\omega'(\bar{y})\rangle = \\ &= -\langle z, T_x y\rangle = \\ &= \langle T_x z, y\rangle, \end{aligned}$$

поскольку $\tau(\bar{x})$ кососимметрично. Таким образом, для $x \in M_m$ и $z \in M_m{}^{\perp}$

$$S_z x = T_x z.$$

Получается следующая интерпретация T_x в терминах параллельного переноса. Фактически связности φ и ψ в $F_M(N)$ порождают различные параллельные переносы слоя $N_{l(m)}$, $m \in M$; T — инфинитезимальная мера этого различия.

Пусть $x \in M_m$, X — векторное поле на M, определенное в окрестности m, такое, что $X(m) = x$, и Y — векторное поле касательных к N, определенное на M, т. е. $Y(m') \in N_{l(m')}$. Пусть, наконец, через D и E обозначено ковариантное дифференцирование относительно связностей φ и ψ соответственно. Тогда имеет место

Предложение 1. $T_X Y(m) = (D_X Y - E_X Y)(m)$.

Доказательство. Так же как в п. 6.4.1 (III), определим функцию f_Y: $F_M(N) \to R^f$ формулой $f_Y(b) = b^{-1}Y(\pi(b))$. Пусть $\bar{X}$ и $\tilde{X}$ — соответственно φ- и ψ-горизонтальные подъемы поля X в $F_M(N)$. Тогда из п. 6.4.1 (III) вытекает, что

$$(E_X Y)(m) = b((\tilde{X} f_Y)(b)),$$

$$(D_X Y)(m) = b((\bar{X} f_Y)(b)),$$

где $\pi(b)=m$. Но

$$\begin{aligned}(\tilde{X}-\bar{X})f_Y(b)&=(\tilde{X}-\bar{X})(b)f_Y=\\ &=\lambda\varphi(\tilde{X}-\bar{X})(b)f_Y=\\ &=\lambda\tau(\tilde{X})(b)f_Y=\\ &=-\tau(\tilde{X}(b))f_Y(b) \qquad [\text{лемма 5.5 (II)}]\\ &=-\tau(\tilde{X})b^{-1}Y(m),\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}T_XY(m)&=b\tau(\tilde{X}(b))b^{-1}Y(m)=\\ &=b((\bar{X}-\tilde{X})f_Y)(b)=\\ &=(D_XY)(m)-(E_XY)(m). \qquad \text{Ч. Т. Д.}\end{aligned}$$

Дадим другую интерпретацию преобразования T_xy. Пусть $x\in M_m$, $y\in M_m{}^{\perp}$ и γ — кривая, причем $\gamma(0)=m$ и $\gamma_*(0)=x$. При фиксированном t пусть $Z(t)$ будет ψ-параллельным переносом y вдоль γ в $\gamma(t)$, $Z(t)\in M_{\gamma(t)}{}^{\perp}$, пусть, далее, $Y(t)$ есть φ-параллельный перенос $Z(t)$ обратно вдоль $I\circ\gamma$ в $I(m)$, так что $t\to Y(t)$ является кривой в $N_{I(m)}$.

Предложение 2. $Y'(0)=T_xy$ [$(')$ обозначает дифференцирование в векторном пространстве $N_{I(m)}$].

Доказательство. Так как Z является ψ-параллельным вдоль γ, то $E_xZ=0$. Но $D_xZ=Y'(0)$, и потому наше утверждение вытекает из предложения 1.

Задача 6. (а) Если Y_0 — векторное поле вдоль кривой γ_0 в M и $Y=dI(Y_0)$ — соответствующее векторное поле вдоль $\gamma=I\circ\gamma_0$ в N, то Y_0 параллельно (относительно φ_0) тогда и только тогда, когда $D_{\gamma_*}Y$ принадлежит нормальному расслоению $\perp(M)$.

(б) Следовательно, γ_0 является геодезической в M тогда и только тогда, когда $D_{\gamma_*}\gamma_*$ принадлежит $\perp(M)$.