10.5. Кривизна и вторая фундаментальная форма

Применив теперь эту интерпретацию второй фундаментальной формы к нашему прежнему выражению для кривизны $K_0(x, y)$, получим некоторые непосредственные следствия.

Напомним, что для ортонормальных векторов $x, y \in M_m$

$$K_0(x, y) = K(x, y) + \langle b[\tau(\bar{x}), \tau(\bar{y})]\,\omega'(\bar{x}), y\rangle,$$

где $\pi(b) = m$ и $\bar{x}, \bar{y}$ являются $(\varphi_d + \varphi_e)$-горизонтальными подъемами x, y в $b \in F(N, M)$. Далее,

$$[\tau(\bar{x}), \tau(\bar{y})]\,\omega'(\bar{x}) = \tau(\bar{x})\,\tau(\bar{y})\,\omega'(\bar{x}) - \tau(\bar{y})\,\tau(\bar{x})\,\omega'(\bar{x}) = \\ = b^{-1}(T_x T_y x - T_y T_x x).$$

Аналогичными рассуждениями получаем, что

$$R_{0xy} = (PR_{xy} + T_x T_y - T_y T_x)\,|_{M_m},$$

где P — ортогональная проекция $N_{I(m)} \to M_m$.

Лемма 1. Пусть $z_1, \ldots, z_e$ — ортонормальный базис в $M_m{}^{\perp}$, $H_l = H_{z_l}$, а x, y — ортонормальная пара в M_m. Тогда

$$K_0(x, y) = K(x, y) + \sum_l (H_l(x, x)\,H_l(y, y) - H_l(x, y)^2).$$

Таким образом, индуцированная кривизна есть кривизна в N плюс сумма «квадратов площадей» относительно второй фундаментальной формы.

Доказательство.

$$\langle T_y x, z_l\rangle = -H_l(x, y),$$

откуда

$$T_y x = -\sum_l H_l(x, y)\,z_l.$$

Поэтому

$$T_x T_y x = -\sum_l H_l(x, y)\,T_x z_l.$$

Далее,

$$\langle T_x z_l, y\rangle = H_l(x, y).$$

Следовательно,

$$\langle T_x T_y x, y\rangle = -\sum_i H_i(x, y)^2.$$

Аналогично

$$T_x x = -\sum_i H_i(x, x) z_i,$$

$$\langle T_y z_i, y\rangle = H_i(y, y),$$

так что

$$-\langle T_y T_x x, y\rangle = \sum_i H_i(x, x) H_i(y, y).$$

Теорема 1. Пусть M погружено в N посредством I, σ — такая кривая многообразия M, что $I\circ\sigma$ является геодезической многообразия N, и пусть P — произвольное плоское сечение многообразия M, касательное к σ. Тогда $K_0(P) \leqslant K(P)$.

Если через Y обозначить φ_0-параллельное векторное поле вдоль σ, такое, что P порождается векторами $x=\sigma_*(0)$ и $y=Y(0)$, то равенство между $K_0(P)$ и $K(P)$ выполняется тогда и только тогда, когда $D_x dI(Y)=0$. В частности, $K_0(Y, \sigma_*)=K(Y, \sigma_*)$ в том и только в том случае, если $dI(Y)$ параллельно в N.

Доказательство. Можно предполагать, что Y и σ_* нормализованы: $\langle Y, Y\rangle=\langle\sigma_*, \sigma_*\rangle=1$, $\langle Y, \sigma_*\rangle=0$. Из свойства локального минимума длины геодезических (или из задачи 6) следует, что σ — геодезическая в M. Поэтому σ_* и $dI(\sigma_*)$ параллельны в M и N соответственно, так что $T_{\sigma_*}\sigma_*=0$, в силу предложения 1. Пусть z_i, H_i такие же, как выше; тогда $H_i(\sigma_*, \sigma_*)=0$ для каждого i и

$$K_0(Y, \sigma_*) - K(Y, \sigma_*) = -\sum_i H_i(Y, \sigma_*)^2 \leqslant 0,$$

что доказывает первое утверждение.

Отсюда также следует, что $K_0(P)=K(P)$ тогда и только тогда, когда $H_i(y, x)=0$ для каждого i. Но

$$H_i(y, x) = -\langle z_i, T_x y\rangle,$$

так что это эквивалентно равенству $T_x y=0$, или, в силу предложения 1,

$$D_x Y = E_x Y = 0,$$

так как Y параллельно в M вдоль σ.

Замечание. Частный случай этой теоремы для $\dim M=2$ известен как *теорема Синга* [61].

Пусть M — подмногообразие риманова многообразия N с индуцированной римановой структурой. Тогда M называется *вполне геодезическим подмногообразием*, если каждая геодезическая многообразия M является геодезической в N.

Теорема 2. Многообразие M является вполне геодезическим подмногообразием многообразия N в том и только в том случае, если его вторая фундаментальная форма обращается в нуль тождественно.

Доказательство. Обращение в нуль второй фундаментальной формы H, очевидно, эквивалентно обращению в нуль формы разности τ, означающему, что расслоение $F(N, M)$ расположено «горизонтально» в расслоении $F_M(N)$. В этом случае совпадают параллельные переносы относительно N и M соответственно, и, значит, каждое векторное поле, параллельное в M, параллельно и в N; это показывает, что геодезические в M являются также геодезическими в N. Поэтому M — вполне геодезическое подмногообразие в N.

Обратно, если M — вполне геодезическое подмногообразие, то каждое $x \in M_m$ касательно к кривой σ, являющейся геодезической и в M, и в N. Тогда, так же как в доказательстве теоремы 1, получаем, что $H_i(x, x)=0$ для всех x, i. Поэтому $H_i=0$ для всех i, в силу своей симметричности, т. е. $H=0$. Ч. Т. Д.

Задача 7. Доказать следующую формулу для преобразований кривизны погруженного многообразия. Пусть z_i, H_i те же, что и выше, S_i — симметрическое линейное преобразование, такое, что $H_i(x, y)=\langle S_i x, y\rangle$.

для всех $x, y \in M_m$. Тогда

$$\text{(а)}\quad R_{0xy}w = PR_{xy}w + \sum_i (\langle S_i x, w\rangle S_i y - \langle S_i y, w\rangle S_i x).$$

Если рассматривать R_0, R как отображения бивекторов в бивекторы, $G^2{}_m \to G^2{}_m$, то (а) превращается в

$$\text{(б)}\qquad R_0(xy) = P_2 R(xy) + \sum_i (S_i x)(S_i y),$$

или

$$R_0 = P_2 R + \sum_i S_{i2}.$$

Здесь P — проекция $N_{I(m)} \to M_m$, и если A — линейное преобразование, то A_2 — его продолжение на бивекторы, задаваемое формулой $A_2(xy) = (Ax)(Ay)$.

Задача 8. Подмногообразие M многообразия N называется *геодезическим в точке* m, если каждая геодезическая многообразия M, проходящая через m, является также геодезической в N.

(а) Показать, что если N имеет постоянную кривизну, то каждое подмногообразие, геодезическое в некоторой точке, является вполне геодезическим.

(б) Обратно, если каждое подмногообразие, геодезическое в некоторой точке, является вполне геодезическим, то N удовлетворяет предположению теоремы Шура (задача 9.3) и, следовательно, имеет постоянную кривизну ($\dim N > 2$) [25, стр. 232—233].

10.6. Локальное гауссово отображение

Пусть U — риманова нормальная координатная окрестность точки $m \in M$ (см. п. 6.3.2). Пусть $\perp(U)$ — сужение на U нормального расслоения многообразия M. Тогда отображение $G_U : \perp(U) \to M_m + M_m{}^{\perp}$ определяется так: если $z \in \perp(U)$, то $G_U(z)$ есть параллельный перенос в N вектора z назад вдоль геодезического луча в U, идущего из точки m в начальную точку вектора z.

Отображение G_U называется *гауссовым отображением относительно* U.