для всех $x, y \in M_m$. Тогда

(а) $R_{0xy}w = PR_{xy}w + \sum_i (\langle S_i x, w\rangle S_i y - \langle S_i y, w\rangle S_i x).$

Если рассматривать R_0, R как отображения бивекторов в бивекторы, $G^2{}_m \to G^2{}_m$, то (а) превращается в

(б) $$R_0(xy) = P_2 R(xy) + \sum_i (S_i x)(S_i y),$$

или

$$R_0 = P_2 R + \sum_i S_{i2}.$$

Здесь P — проекция $N_{I(m)} \to M_m$, и если A — линейное преобразование, то A_2 — его продолжение на бивекторы, задаваемое формулой $A_2(xy) = (Ax)(Ay)$.

Задача 8. Подмногообразие M многообразия N называется *геодезическим в точке* m, если каждая геодезическая многообразия M, проходящая через m, является также геодезической в N.

(а) Показать, что если N имеет постоянную кривизну, то каждое подмногообразие, геодезическое в некоторой точке, является вполне геодезическим.

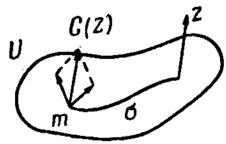
(б) Обратно, если каждое подмногообразие, геодезическое в некоторой точке, является вполне геодезическим, то N удовлетворяет предположению теоремы Шура (задача 9.3) и, следовательно, имеет постоянную кривизну ($\dim N > 2$) [25, стр. 232—233].

10.6. Локальное гауссово отображение

Пусть U — риманова нормальная координатная окрестность точки $m \in M$ (см. п. 6.3.2). Пусть $\perp(U)$ — сужение на U нормального расслоения многообразия M. Тогда отображение $G_U : \perp(U) \to M_m + M_m{}^{\perp}$ определяется так: если $z \in \perp(U)$, то $G_U(z)$ есть параллельный перенос в N вектора z назад вдоль геодезического луча в U, идущего из точки m в начальную точку вектора z.

Отображение G_U называется *гауссовым отображением относительно* U.

З а м е ч а н и е. Если $N=R^f$, то параллельный перенос в N не зависит от пути, так что G можно определить глобально на $\perp(M)$, согласованно с G_U на $\perp(U)$. Это всегда так, если N имеет тривиальную группу голономии.



Р и с. 35.

Заметим, что $\perp(M)$ как расслоение, ассоциированное с $F(N, M)$, имеет связность, соответствующую форме $\varphi_d+\varphi_e$ (§ 5.4).

Предложение 3. Пусть $x\in M_m$, $z\in M_m{}^{\perp}$ и $\tilde{x}$ — горизонтальный подъем x в $z\in\perp(U)$. Тогда $dG_U(\tilde{x})$ можно отождествить с элементом $y\in M_m+M_m{}^{\perp}$, $y=T_xz$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть σ — луч в U с касательной x в m. Если $\tilde{\sigma}$ — горизонтальный подъем луча σ в $F(N, M)$, то кривая

$$t\to\tilde{\sigma}(t)\tilde{\sigma}(0)^{-1}z$$

в $\perp(U)$ касается $\tilde{x}$. Композиция G_U с этой кривой порождает кривую

$$t\to\bar{\sigma}(0)\bar{\sigma}(t)^{-1}\tilde{\sigma}(t)\tilde{\sigma}(0)^{-1}z,$$

где $\bar{\sigma}$ — горизонтальный подъем σ в $F_M(N)$. По построению, касательная к этой кривой есть $dG_U(\tilde{x})=y$, но, в силу предложения 2, $y=T_xz$. Ч. Т. Д.

Следствие 1. Если x, $y\in M_m$, $z\in M_m{}^{\perp}$, $\tilde{x}$ — произвольный подъем x в $z\in\perp(U)$, то $H_z(x, y)=\langle dG_U(\tilde{x}), y\rangle$ (здесь снова производится некоторое отождествление).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\tilde{x}$ — горизонтальный подъем, то это утверждение вытекает из предложения 3.

Если $\tilde{x}$ не горизонтально, то, обозначив через x' горизонтальный подъем, заметим, что $dG_U(\tilde{x}-x')$ — вектор, касательный к $M_m{}^{\perp}$, так что его скалярное произведение с y равно нулю. Это следует из того, что $\tilde{x}-x'$ является вектором, касательным к $M_m{}^{\perp}$, а G_U тождественно на $M_m{}^{\perp}$. Ч. Т. Д.

10.7. Гессианы нормальных координат в N

Пусть M — произвольное многообразие, f — вещественная C^{∞}-функция на M, $m \in M$.

Функция f имеет *критическую точку* в n, если $df_m=0$. Если m — критическая точка f, то *гессиан* H_f *функции* f *в* m является билинейной функцией на M_m, определенной следующим образом. Если x, $y \in M_m$, X — векторное C^{∞}-поле, такое, что $X(m)=x$, то

$$H_f(x, y)=y(Xf).$$

Поскольку $df_m=0$, то легко проверить, что $H_f(x, y)$ не зависит от выбора X, а также симметричность H_f.

Задача 9. Проверить эти свойства H_f, не используя координат.

Вернемся теперь к погружению I: $M \to N$. Вторая фундаментальная форма будет связана с гессианами некоторых функций на M (см. ниже теорему 3).

Пусть V — нормальная координатная окрестность точки $n=I(m)$ в N; пусть $v_1, \ldots, v_f$ — нормальные координатные функции на V, так что $V_i(n)=(\partial/\partial v_i)(n)$ — ортонормальный базис в N_n. Пусть $u_i=v_i \circ I$. Тогда m является критической точкой линейной комбинации $u=\sum_i a_i u_i$ в том и только в том случае, если

$$\sum_i a_i V_i(n) \in M_m{}^{\perp},$$

т. е. когда $du=\sum_i a_i du_i$ аннулирует M_m.

Предположим для простоты, что $u=u_1$ имеет критическую точку в m. Вычислим $H_u(x, x)$ для всех $x \in M_m$, определив тем самым H_u.