Если $\tilde{x}$ не горизонтально, то, обозначив через x' горизонтальный подъем, заметим, что $dG_U(\tilde{x}-x')$ — вектор, касательный к $M_m{}^\perp$, так что его скалярное произведение с y равно нулю. Это следует из того, что $\tilde{x}-x'$ является вектором, касательным к $M_m{}^\perp$, а G_U тождественно на $M_m{}^\perp$. Ч. Т. Д.

10.7. Гессианы нормальных координат в N

Пусть M — произвольное многообразие, f — вещественная C^∞-функция на M, $m\in M$.

Функция f имеет *критическую точку* в n, если $df_m=0$. Если m — критическая точка f, то *гессиан H_f функции f в m* является билинейной функцией на M_m, определенной следующим образом. Если $x, y\in M_m$, X — векторное C^∞-поле, такое, что $X(m)=x$, то

$$H_f(x, y)=y(Xf).$$

Поскольку $df_m=0$, то легко проверить, что $H_f(x, y)$ не зависит от выбора X, а также симметричность H_f.

Задача 9. Проверить эти свойства H_f, не используя координат.

Вернемся теперь к погружению I: $M\to N$. Вторая фундаментальная форма будет связана с гессианами некоторых функций на M (см. ниже теорему 3).

Пусть V — нормальная координатная окрестность точки $n=I(m)$ в N; пусть $v_1, \ldots, v_f$ — нормальные координатные функции на V, так что $V_i(n)=(\partial/\partial v_i)(n)$ — ортонормальный базис в N_n. Пусть $u_i=v_i\circ I$. Тогда m является критической точкой линейной комбинации $\bar{u}=\sum_i a_iu_i$ в том и только в том случае, если

$$\sum_i a_iV_i(n)\in M_m{}^\perp,$$

т. е. когда $du=\sum_i a_i d\bar{u}_i$ аннулирует M_m.

Предположим для простоты, что $u=u_1$ имеет критическую точку в m. Вычислим $H_u(x, x)$ для всех $x\in M_m$, определив тем самым H_u.

Пусть σ — геодезическая, а $\sigma_*(0)=x$; воспользуемся σ_* для определения $H_u(x, x)$. Пусть X — продолжение σ_* на окрестность точки m, а Y — продолжение dIX на окрестность точки n. Пусть $Y=\sum_i g_i V_i$ — координатное выражение для Y. Тогда

$$Xu=\left(\sum_i g_i V_i v_1\right)\circ I = g_1 \circ I,$$

так что

$$H_u(x, x)=xXu=x(g_1\circ I)=dI(x)g_1=yg_1,$$

где $y=Y(n)$. В силу предложения 1, имеем

$$\begin{aligned} T_x x &= D_x X - E_x X = \\ &= D_x X, \quad \text{так как } \sigma \text{ — геодезическая в } M, \\ &= D_y Y = \\ &= D_y\left(\sum_i g_i V_i\right) = \\ &= \sum_i (yg_i)\, V_i(n) + D_y \sum_i g_i(n)\, V_i = \\ &= \sum_i (yg_i)\, V_i(n). \end{aligned}$$

На последнем шаге $D_y \sum_i g_i(n)\, V_i=0$, поскольку v_i — нормальные координаты в N, и, значит, $\sum_i g_i(n) V_i$ — касательное поле к геодезической в направлении y. Таким образом,

$$\begin{aligned} H_u(x, x) &= yg_1 = \\ &= \langle T_x x,\ V_1(n)\rangle = \\ &= -H_z(x, x), \quad z=V_1(n). \end{aligned}$$

Нами доказана

Теорема 3. Пусть I: $M \to N$ — погружение, $m \in M$, V — нормальная координатная окрестность точки

$n=I(m)\subset N$, $u=\Sigma a_i u_i$, где $u_i=v_i\circ I$ — нормальные координаты, снесенные на M. Предположим, что $z=\Sigma a_i V_i(n)\in M_m{}^{\perp}$. Тогда m — критическая точка функции u, гессиан которой только знаком отличается от второй фундаментальной формы H_z.

Если $N=R^f$, то можно выбрать нормальные координаты на всем N, и функция u оказывается с точностью до константы линейной функцией, снесенной на M. Гауссово отображение, определенное на всем $\perp(M)$, можно рассматривать как отображение $\perp(M)$ в N, если отождествлять N_n с N, при этом G не зависит от n. Каждому $n\in R^f$ соответствует линейная функция u_n, $u_n(n')=\langle n', n\rangle$ на R^f. Если $G(z)=n$, $z\in M_m{}^{\perp}$, то комбинация нормальных координат, соответствующая z, с точностью до константы есть просто u_n. Итак, мы получаем

Следствие 2. Пусть I: $M\to R^f$ — погружение, $z\in M_m{}^{\perp}$ и $G(z)=n$; тогда следующие три формы эквивалентны:

(а) вторая фундаментальная форма H_z точки z,

(б) форма гессиана функции $u_n\circ I$, взятая с обратным знаком,

(в) форма $(x, y)\to\langle dG(\bar{x}), dIy\rangle$,

где x — подъем x в $\perp(M)_z$.

Задача 10. Предположим, что M — подмногообразие в окрестности $n\in N$, заданное уравнениями $g_i=0$, $i=1, \ldots, e$, где g_i — вещественные C^∞-функции на N, такие, что $g_i(n)=0$ и $dg_i(n)$ линейно независимы. Пусть v_i — вышеуказанные нормальные координаты в точке n, и $M'=V\cap \exp_n(M_n)$, где $\exp_n$ — экспоненциальное отображение N. Пусть

$$g=\sum_l a_l g_l,\quad dg(n)=\sum_l b_l dv_l(n),\quad u=\sum_l b_l u_l,\quad f=g|_{M'}.$$

Показать, что $H_f=-H_u$, причем обе формы определены на $M_n=M_n'$.

Задача 11. Пусть $S_1, \ldots, S_e$ — симметрические $d\times d$-матрицы; показать, что отображение $R^d\to R^f$, определенное формулой $x \to (x, -\langle S_1 x, x\rangle, \ldots, -\langle S_e x, x\rangle)$, является вложением, при котором $S_1, \ldots, S_e$ оказываются матрицами второй фундаментальной формы относительно базиса $D_i(0)$, $i \leqslant d$, в R^{d_0} и базиса $D_i(0)$, $i > d$, в нормальном пространстве (только в одной этой точке).

Задача 12. Пусть $f = u_1u_2 + u_3u_4$, $g = u_1u_3 + u_2u_4 : R^4 \to R$. Тогда пересечение множества $f^{-1}(1) \cap g^{-1}(0)$ с окрестностью точки $(1, 1, 0, 0)$ является двумерным подмногообразием в R^4. Найти кривизну этого подмногообразия в точке $(1, 1, 0, 0)$.

10.8. Формулировка задачи погружения

Теперь мы будем искать достаточные условия, при которых отображение M в N является изометрическим погружением, а также структуры, позволяющие получать такие отображения. Эти условия составляют часть необходимых условий из § 10.2 и 10.3, касающихся расслоения адаптированных ортонормальных базисов. Поскольку мы хотим найти условия в терминах внутренних структур многообразий M и N, необходимо каким-то образом заранее построить это расслоение. Если M диффеоморфно R^d, то это не представляет затруднений, ибо тогда все расслоения над M тривиальны, а расслоение адаптированных ортонормальных базисов будет эквивалентно расслоению произведения $M \times O(d) \times O(e)$. Если M не столь тривиально, то расслоение адаптированных ортонормальных базисов не обязательно единственно как расслоение. Однако всякому решению нашей задачи соответствует гладкое погружение M в N. Если скомбинировать ортонормальные базисы такого погружения и многообразия M относительно его римановой метрики (но не метрики, индуцированной погружением), то получится расслоение B с группой $G = O(d) \times O(e)$, которое может служить моделью требуемого расслоения. В дальнейшем предполагается, что задано это расслоение B.

Если бы существовало изометрическое погружение $I: M \to N$, то имелось бы также соответствующее погру-