деленное формулой $x \to (x, -\langle S_1x, x\rangle, \ldots, -\langle S_ex, x\rangle)$, является вложением, при котором $S_1, \ldots, S_e$ оказываются матрицами второй фундаментальной формы относительно базиса $D_i(0)$, $i \leqslant d$, в R^{d_0} и базиса $D_i(0)$, $i > d$, в нормальном пространстве (только в одной этой точке).

Задача 12. Пусть $f = u_1u_2 + u_3u_4$, $g = u_1u_3 + u_2u_4 : R^4 \to R$. Тогда пересечение множества $f^{-1}(1) \cap g^{-1}(0)$ с окрестностью точки $(1, 1, 0, 0)$ является двумерным подмногообразием в R^4. Найти кривизну этого подмногообразия в точке $(1, 1, 0, 0)$.

10.8. Формулировка задачи погружения

Теперь мы будем искать достаточные условия, при которых отображение M в N является изометрическим погружением, а также структуры, позволяющие получать такие отображения. Эти условия составляют часть необходимых условий из § 10.2 и 10.3, касающихся расслоения адаптированных ортонормальных базисов. Поскольку мы хотим найти условия в терминах внутренних структур многообразий M и N, необходимо каким-то образом заранее построить это расслоение. Если M диффеоморфно R^d, то это не представляет затруднений, ибо тогда все расслоения над M тривиальны, а расслоение адаптированных ортонормальных базисов будет эквивалентно расслоению произведения $M \times O(d) \times O(e)$. Если M не столь тривиально, то расслоение адаптированных ортонормальных базисов не обязательно единственно как расслоение. Однако всякому решению нашей задачи соответствует гладкое погружение M в N. Если скомбинировать ортонормальные базисы такого погружения и многообразия M относительно его римановой метрики (но не метрики, индуцированной погружением), то получится расслоение B с группой $G = O(d) \times O(e)$, которое может служить моделью требуемого расслоения. В дальнейшем предполагается, что задано это расслоение B.

Если бы существовало изометрическое погружение I: $M \to N$, то имелось бы также соответствующее погружение I': $B \to F(N)$. Отображение I' является послойным: оно переводит слои в слои и коммутирует с действием G. Если I' дано, то, проектируя на M и N, можно восстановить I. Подход к задаче отыскания надлежащего I' будет сформулирован в терминах графика этого отображения, являющегося подмногообразием в $P=B\times\times F(N)$. Заметим, что G действует на P посредством диагонального вложения G в $G\times O(f)$.

Предложение 4. Подмногообразие Q многообразия P тогда и только тогда является графиком послойного отображения I': $B \to F(N)$, когда Q инвариантно относительно действия G, а проекция Q на B является диффеоморфизмом.

Доказательство. Если p_1 и p_2 — проекции P на B и $F(N)$, то I' определяется формулой $I'=p_2(p_1|_Q)^{-1}$. Доказательство сводится к простой проверке.

Формы смещения $F(M)$ и $F(N)$ можно снести на P: первую через промежуточное расслоение B, вторую непосредственно с помощью p_2. Обозначим соответствующие формы через θ и ω; форма ω распадается на R^d-значную и R^e-значную составляющие, $\omega=\omega'+\omega''$.

Пусть π_1: $B \to M$ и π_2: $F(N) \to N$ — проекции в расслоениях. В дальнейшем нам понадобятся такие свойства форм θ, ω: для $t \in P_p$

$$\|d\pi_1 dp_1(t)\| = \|\theta(t)\| \quad \text{и} \quad \|d\pi_2 dp_2(t)\| = \|\omega(t)\|.$$

Теорема 4. Пусть подмногообразие j: $Q \to P$ (j — отображение включения) является графиком послойного отображения I'. Тогда индуцированное отображение I: $M \to N$ в том и только в том случае является изометрическим погружением, когда $j^*(\theta - \omega')=0$ и $j^*\omega''=0$.

Доказательство. Так как, по предположению, $p_1|_Q$ является диффеоморфизмом, то определено отображение

$$J=(p_1|_Q)^{-1}: B \to P.$$

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "j"] & P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\
B \arrow[u, "J"] \arrow[r, "I'"'] \arrow[d, "\pi_1"] & F(N) \arrow[d, "\pi_2"] \\
M \arrow[r, "I"'] & N
\end{tikzcd}$$

Предположим, что $j^*(\theta-\omega')=0$, $j^*\omega''=0$. Пусть $x\in M_m$, $\bar{x}$ — подъем x в $B: d\pi_1(\bar{x})=x$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|dI(x)\| &= \|d\pi_2\, dI'(\bar{x})\| = \\
&= \|d\pi_2\, dp_2\, dj\, dJ(\bar{x})\| = \\
&= \|\omega'\, dj\, dJ(\bar{x})\| + \|\omega''\, dj\, dJ(\bar{x})\| = \\
&= \|\theta\, dj\, dJ\,(\bar{x})\| + 0 = \\
&= \|d\pi_1\, dp_1\, dj\, dJ\,(\bar{x})\| = \\
&= \|d\pi_1(\bar{x})\| = \\
&= \|x\|.
\end{aligned}$$

То что изометричность I влечет $j^*(\theta-\omega')=0$ и $j^*\omega''=0$, уже доказано в § 10.2.

Укажем теперь условия, при которых можно построить подмногообразие Q. Поскольку эти условия будут зависеть от свойств второй фундаментальной формы, а мы хотим, чтобы наша формулировка как можно в большей степени основывалась на внутренних свойствах многообразий M и N, то желательно, чтобы предполагаемые свойства второй фундаментальной формы зависели только от формы кривизны $F(M)$, но не от формы кривизны $F(N)$. Однако форма кривизны $F(N)$ входит в выражение для формы кривизны расслоения $F(M)$, и потому необходимо потребовать, чтобы кривизна N не зависела от точки и от направления. Таким образом, *мы предполагаем, что N обладает постоянной кривизной k,* и, следовательно, форма кривизны $F(N)$ сносится на P посредством p_2 в форму $\Phi=k\omega\omega^t$, где ω^t — транспозиция вектора-столбца ω, откуда $\Phi_{ij}=k\omega_i\omega_j$ (см. задачу 9.27).

Условимся, что формы на B имеют индекс 0, который исчезает после снесения на P. Таким образом, $\theta = p_1^* \theta_0$. Форма связности на $F(M)$ сносится на B с помощью проекции q: $B \to F(M)$ в $\mathfrak{o}(d)$-значную форму ψ_0. Положим $\psi = p_1^* \psi_0$. Поступая так же с кривизной, найдем, что структурное уравнение на P принимает вид $d\psi = -\psi^2 + \Psi$.

Форма связности на $F(N)$ с помощью p_2 сносится в форму φ на P. Она распадается на несколько блоков:

форму φ' со значениями в $\mathfrak{o}(d)$,

$d \times e$-матрицу τ со значениями в $\mathfrak{k}_1$,

$e \times d$-матрицу $-\tau^t$

и

форму φ'' со значениями в $\mathfrak{o}(e)$.

Тогда структурные уравнения на $F(N)$ дают

$$\begin{aligned} d\omega' &= -\varphi'\omega' + \tau\omega'', \\ d\omega'' &= -\tau^t\omega' + \varphi''\omega'', \\ d\varphi' &= -\varphi'^2 + \tau\tau^t + k\omega'\omega'^t, \\ d\tau &= -\varphi'\tau - \tau\varphi'' + k\omega'\omega''^t, \\ d\varphi'' &= -\tau^t\tau - \varphi''^2 + k\omega''\omega''^t. \end{aligned}$$

Пусть многообразие M связно и односвязно, а N полно.

Теорема 5. Пусть σ_0 и ψ_0'' — такие 1-формы на B, что $\psi_0 + \psi_0''$ есть форма связности, в которой ψ_0'' является $\mathfrak{o}(e)$-значной составляющей; пусть σ_0 — горизонтальная эквивариантная $\mathfrak{k}_1$-значная 1-форма на B, удовлетворяющая условиям:

(1) $\Psi_0 = \sigma_0\sigma_0^t + k\theta_0\theta_0^t$,

(2) $\sigma_0^t\theta_0 = 0$,

(3) $d\sigma_0 = -\psi_0\sigma_0 - \sigma_0\psi_0''$,

(4) $d\psi_0'' = -\psi_0''^2 - \sigma_0^t\sigma_0$.

Тогда кораспределение на P, порожденное формами $\theta - \omega'$, ω'', $\psi - \varphi'$, $\sigma - \tau$ и $\psi'' - \varphi''$, инволютивно; каждое максимальное связное интегральное многообразие является компонентой связности некоторого многообразия Q, удовлетворяющего предположениям теоремы 4, и определяет таким образом изометрическое погружение многообразия M в многообразие N.

Доказательство. То что это кораспределение инволютивно, вытекает из условий (1)—(4) и структурных уравнений. Например,

$$\begin{aligned} d(\psi-\varphi') &= -\psi^2+\Psi+\varphi'^2-\tau\tau^t-k\omega'\omega'^t= \\ &= -(\psi-\varphi')\psi-\varphi'(\psi-\varphi')+\sigma\sigma^t+k\theta\theta^t-\tau\tau^t-k\omega'\omega'^t= \\ &= -(\psi-\varphi')\psi-\varphi'(\psi-\varphi')+(\sigma-\tau)\sigma^t+ \\ &\qquad +\tau(\sigma^t-\tau^t)+k(\theta-\omega')\theta^t+k\omega'\left(\theta^t-\omega'^t\right). \end{aligned}$$

Остальные четыре внешние производные, почти из тех же соображений, находятся в идеале, порожденном теми же пятью формами. (На самом деле следовало бы рассматривать компоненты этих векторнозначных форм, однако подобное обращение с ними легко обосновать.)

Покажем прежде всего, что размерность нашего кораспределения постоянна и дополнительна к размерности B. Это вытекает из того, что на подпространстве касательных к сомножителю $F(N)$ в произведении P (т. е. к ядру dp_1) упомянутые пять форм превращаются в $-\omega'$, ω'', $-\varphi'$, $-\tau$, $-\varphi''$, определяя некоторую параллелизацию этого подпространства с точностью до тривиальных повторений $(\varphi'_{ij}=-\varphi'_{ji})$. Таким образом, пятерка $(\theta-\omega', \omega'', \psi-\varphi', \sigma-\tau, \psi''-\varphi'')$ осуществляет линейное отображение каждого касательного пространства P_p *на* $R^f+\mathfrak{o}(f)$ (допуская некоторую неточность выражения), и, значит, его ядро имеет постоянную размерность, совпадающую с размерностью B.

То же рассуждение показывает, что ядро этого линейного отображения дополнительно к ядру отображения dp_1, так что dp_1 — взаимно однозначное отображение на рассматриваемое распределение. Следовательно, интегральные подмногообразия отображаются локально диффеоморфно в B.

Так как $\psi-\varphi'$ и $\psi''-\varphi''$ аннулируют касательные к орбитам диагонального действия G, то максимальное интегральное подмногообразие Q_0 будет содержать всю компоненту такой орбиты, если только содержит некоторую ее точку. Более того, эквивариантность форм распределения гарантирует, что всякий элемент G преобразует интегральные многообразия в интегральные многообразия. Таким образом, $Q=Q_0G$ будет интегральным многообразием, инвариантным относительно G.

Для доказательства того, что $r=p_1|_Q$ является отображением на B, достаточно проверить, что горизонтальные подъемы геодезических сегментов в M можно поднять в Q: начиная с одной точки в B, мы можем получить все остальные точки движением вдоль таких кривых и действием G. Если γ_0 — горизонтальный подъем геодезической в M, то

$$\theta_0(\gamma_{0*})=x=\text{const},$$
$$\psi_0(\gamma_{0*})=0, \quad \psi_0''(\gamma_{0*})=0,$$

и если

$$\sigma_{0ij}=\sum_k s_{0ijk}\theta_{0k},$$

то

$$\sigma_{0ij}(\gamma_{0*})=\sum_k x_k(s_{0ijk}\circ\gamma_0).$$

Функции $s_{0ijk}\circ\gamma_0$ непрерывны и, следовательно, ограничены, поскольку область определения γ_0 — замкнутый интервал. Подъем γ_0 в P, который мы обозначим через γ, должен удовлетворять следующим условиям:

$$\omega'(\gamma_*)=\theta(\gamma_*)=x, \qquad \omega''(\gamma_*)=0,$$
$$\varphi'(\gamma_*)=\psi(\gamma_*)=0, \qquad \varphi''(\gamma_*)=\psi''(\gamma_*)=0,$$
$$\tau_{ij}(\gamma_*)=\sigma_{ij}(\gamma_*)=\sum_k x_k(s_{ijk}\circ\gamma).$$

Так как нас интересует лишь компонента γ, принадлежащая $F(N)$, спроектируем γ_* на $F(N)$. Получаем

$$dp_2\gamma_*=E(x)+\sum_{i,k\leqslant d,\ j>d} x_k(s_{ijk}\circ\gamma\circ p_2)F_{ij}=X.$$

В силу условия полноты N, интегральные кривые такого X, очевидно, существуют, так что существует и подъем γ.

Остается показать, что r взаимно однозначно. Для этого мы замечаем, что Q — главное расслоение с группой G и некоторым базисным многообразием M' и что $r\colon Q \to B$ — послойное отображение. Так как кривые можно поднимать из B в Q, то их можно поднимать и из M в M'. Таким образом, индуцированное отображение $M' \to M$ оказывается накрывающим отображением, и оно взаимно однозначно, поскольку M односвязно, а M' связно. Отсюда следует, что r тоже взаимно однозначно. Ч. Т. Д.

Замечания. (а) Чтобы найти локальные вложения M в N, достаточно построить формы, такие, как σ_0, ψ_0'', на некотором сечении B над M, поскольку по эквивариантности их можно продолжить на остальную часть слоя; вместо сечения можно также использовать M.

(б) Уравнения (3) и (4) являются структурными уравнениями для σ_0 и ψ_0''. Уравнение (4) показывает, что $\mathfrak{o}(e)$-значная часть кривизны на B есть $-\sigma_0^t\sigma_0$. Для интерпретации (3) как структурного уравнения рассмотрим присоединенное действие G на своем ортогональном дополнении в $\mathfrak{o}(f)$. Тогда $\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0^t & 0 \end{pmatrix}$ принимает значения в этом G-модуле, является горизонтальным и обладает инвариантностью в смысле леммы 5.3, часть (II). Таким образом, (3) можно переформулировать так:

$$(3') \qquad D\sigma_0 = 0,$$

где D, так же как в § 5.3, относится к связности

$$\psi_0 + \psi_0''.$$

(в) Уравнения (1) и (2) являются алгебраическими в каждой точке. Картан [24] показал, что они имеют много решений, если только $f \geqslant \frac{1}{2} d(d+1)$, так что уравнения (1) и (2) локально разрешимы. Решения, полученные Картаном, принадлежат некоторому классу, названному им регулярным; для аналитических римановых многообразий эта регулярность обеспечивает также существование решений уравнений (3) и (4); в этом заключается теорема Картана — Кэлера [23, 37] в нашем контексте. В доказательстве существенно используется аналитичность, поскольку теорема Картана — Кэлера опирается на теорему Коши — Ковалевской, справедливую только в аналитическом случае [81, стр. 81; 37].

Задача 13. Система алгебраических уравнений (1) и (2) эквивалентна отысканию таких матриц второй квадратичной формы S_i, $i=1, \ldots, e$, что кривизна $K(x, y)$ ортонормальных векторов x, $y \in M_m$ задается формулой

$$K(x, y)=\sum_{i=1}^{e}(\langle S_i x, x\rangle\langle S_i y, y\rangle-\langle S_i x, y\rangle^2)+k.$$

Задача 14. Предполагая, что система уравнений (1) и (2) имеет картановское решение, которое удовлетворяет только тождествам кривизны, показать, что если R — тензор (не тензорное поле!), удовлетворяющий тем же тождествам, то существует риманово многообразие, допускающее R как тензор кривизны в одной точке. (*Указание*: положить $k=0$ и рассмотреть вложение задачи 11.)

Следующая задача дает набросок решения системы уравнений (1) и (2), однако при $f=\frac{1}{2}d(d+1)+d$.

Задача 15. Пусть U — пространство 4-линейных функций на R^d, удовлетворяющих тождествам кривизны, S — пространство симметрических $d\times d$-матриц, P — пространство симметрических 4-линейных функций на R^d и T — пространство 4-линейных функций t на R^d, удовлетворяющих следующим тождествам: $t(x, y, z, w)=$ $=t(y, x, z, w)=t(z, w, x, y)$, $t\in T, x, y, z, w\in R^d$. P — подпространство в T, причем T можно рассматривать как пространство симметрических билинейных форм на V, симметрическом подпространстве в $R^d\otimes R^d$. Пусть $D=$ $=d(d-1)/2$, $E=D+d=$размерность V.

Говоря, что форма $t\in T$ положительно определена, мы будем подразумевать, что она такова как симметрическая билинейная форма на V.

Пусть $F\colon S\to T$ определяется равенством

$$F(s)(x, y, z, w)=\langle sx, y\rangle\langle sz, w\rangle,$$

а $G\colon T\to U$ равенством

$$G(t)(x, y, z, w)=t(x, z, y, w)-t(x, w, y, z).$$

Проверить следующие утверждения:

(а) Если $s_1, \ldots, s_k\in S$, то формула $R=\sum\limits_i G(F(s_i))$ выражает тензор кривизны R в терминах вторых фундаментальных форм s_i для вложения в R^{d+k}.

(б) $\dim T=E(E+1)/2$, $\dim P=d(d^3+2d^2+3d+2)/24$, $\dim U=d^2(d^2-1)/12=\dim T-\dim P$, а G является линейным отображением с ядром P, и потому образ G есть все U.

(в) Симметрическая билинейная форма является неотрицательно полуопределенной ранга 1 в том и только в том случае, если ее матрица представляется в виде XX^t, где X — матрица-столбец.

(г) Если в V взять базис из элементов $\frac{1}{2}(e_i\otimes e_j+e_j\otimes e_i)$, $i\leqslant j$, занумерованных парами $I=(i, j)$, $i\leqslant j$, то матрицей $F(s)$ служит $(s_I s_J)$, где $s_I=s_{ij}$ есть (i, j)-й элемент $d\times d$-матрицы s.

(д) Всякую неотрицательную полуопределенную симметрическую билинейную форму t на V можно разложить в сумму $k(=$ ранг $t)$ таких же матриц ранга 1, $k\leqslant E$. Таким образом, множество сумм $\sum\limits_i F(s_i)$ совпадает с подпространством неотрицательных полуопределенных форм из T.

(е) Если упорядочить двойные индексы I так, чтобы сначала шли пары (i, i), обозначить через I_r единичную матрицу порядка r и через K обозначить $d\times d$-матрицу, все элементы которой равны 1, то билинейная форма на V с матрицей $\begin{pmatrix} I_d+K & 0 \\ 0 & I_D \end{pmatrix}$ положительно определена и принадлежит P.

(ж) Каждый класс смежности $t+P$ содержит положительно определенную форму.

Задача 16. Нижеследующее извлекается из доказательства теоремы 5.

Пусть F: $M \to N$ — дифференцируемое отображение, и N параллелизуемо 1-формами ω_i, $i=1, \ldots, f$. Пусть p_1, p_2 — проекции произведения $M \times N$. Тогда кораспределение, порожденное 1-формами $p_1^* F^* \omega_i - p_2^* \omega_i$, $i=1, \ldots$ $\ldots, f$, интегрируемо, и график отображения F является интегральным подмногообразием.

Обратно, если формы θ_i, $i=1, \ldots, f$, на M таковы, что $p_1^* \theta_i - p_2^* \omega_i$ порождают интегрируемое кораспределение, то интегральное подмногообразие локально является графиком отображений окрестностей многообразия M в многообразие N.

10.9. Гиперповерхности

Гиперповерхностью называется многообразие, погруженное в пространство на 1 большей размерности; в введенных ранее обозначениях $e=1$. При погружении в R^f кривизна выражается в терминах одной фундаментальной формы, и потому каждое R_{xy} либо равно 0, либо имеет ранг 2, так что преобразования кривизны гиперповерхности в R^f имеют весьма специальный вид.

Возможности для расслоения адаптированных ортонормальных базисов также ограничены в случае гиперповерхности. Фактически расслоение единичных нормалей должно быть либо связным двулистным накрытием M, либо распадаться на два экземпляра M; таким образом, B — либо двойное накрытие $F(M)$, либо пара экземпляров $F(M)$. Если M односвязно, возможен лишь случай двух экземпляров. Благодаря этому соответствующий частный случай теоремы 5 существенно проще, поскольку сразу же определяется $\psi''=0$.

Теорема 6. Пусть M — односвязное риманово многообразие с формой кривизны $\Psi_0 = \sigma_0 \sigma_0^t + k\theta_0 \theta_0^t$, где σ_0 есть R^d-значная эквивариантная 1-форма на $F(M)$, такая, что $D\sigma_0 = 0$, $\sigma_0 \theta_0^t = 0$. Если N является $(d+1)$-мерным полным многообразием с постоянной кривизной k, то M можно погрузить в N.

Погружение I однозначно определено указанием второй фундаментальной формы σ_0, дифференциала dI_m при одном $m \in M$ и выбором единичной нормали на M. Это дает теорему единственности: