Пусть F: $M \to N$ — дифференцируемое отображение, и N параллелизуемо 1-формами ω_i, $i=1, \ldots, f$. Пусть p_1, p_2 — проекции произведения $M \times N$. Тогда кораспределение, порожденное 1-формами $p_1^* F^* \omega_i - p_2^* \omega_i$, $i=1, \ldots$ $\ldots, f$, интегрируемо, и график отображения F является интегральным подмногообразием.

Обратно, если формы θ_i, $i=1, \ldots, f$, на M таковы, что $p_1^* \theta_i - p_2^* \omega_i$ порождают интегрируемое кораспределение, то интегральное подмногообразие локально является графиком отображений окрестностей многообразия M в многообразие N.

10.9. Гиперповерхности

Гиперповерхностью называется многообразие, погруженное в пространство на 1 большей размерности; в введенных ранее обозначениях $e=1$. При погружении в R^f кривизна выражается в терминах одной фундаментальной формы, и потому каждое R_{xy} либо равно 0, либо имеет ранг 2, так что преобразования кривизны гиперповерхности в R^f имеют весьма специальный вид.

Возможности для расслоения адаптированных ортонормальных базисов также ограничены в случае гиперповерхности. Фактически расслоение единичных нормалей должно быть либо связным двулистным накрытием M, либо распадаться на два экземпляра M; таким образом, B — либо двойное накрытие $F(M)$, либо пара экземпляров $F(M)$. Если M односвязно, возможен лишь случай двух экземпляров. Благодаря этому соответствующий частный случай теоремы 5 существенно проще, поскольку сразу же определяется $\psi''=0$.

Теорема 6. Пусть M — односвязное риманово многообразие с формой кривизны $\Psi_0 = \sigma_0 \sigma_0^t + k\theta_0\theta_0^t$, где σ_0 есть R^d-значная эквивариантная 1-форма на $F(M)$, такая, что $D\sigma_0=0$, $\sigma_0\theta_0^t=0$. Если N является $(d+1)$-мерным полным многообразием с постоянной кривизной k, то M можно погрузить в N.

Погружение I однозначно определено указанием второй фундаментальной формы σ_0, дифференциала dI_m при одном $m \in M$ и выбором единичной нормали на M. Это дает теорему единственности:

Теорема 7. Пусть N — такое многообразие постоянной кривизны k, что группа изометрий N транзитивна на $F(N)$ (например, $N=S^{d+1}$ или $N=R^{d+1}$). Если $I_i\colon M\to N$, $i=1,2$, — изометричные погружения многообразия M как гиперповерхности, вторые фундаментальные формы которых совпадают, то существует такая изометрия J многообразия N, что $JI_1=I_2$.

Теорема 7 справедлива и без предположения односвязности M, поскольку раз погружения существуют, то интегральные многообразия однозначно задают графики своих продолжений. Изометрия J определяется заданием условий в некоторой точке m: $dJ\,dI_{1m}=dI_{2m}$ и $dJ(z_1)=z_2$, где z_i — выбранная единичная нормаль в m для I_i.

Задача 17. Пусть $I_i\colon M\to N$ — изометрические вложения как гиперповерхности, $i=1, 2$, с согласованными вторыми фундаментальными формами, причем для некоторого $m\in M$ существует изометрия $J\colon N\to N$, при которой $dJdI_{1m}=dI_{2m}$, и если z — нормаль в m, $z'=dJ(z)$, то $S_{2z'}=S_{1z}\neq 0$, где S_2, S_1 — вторые фундаментальные формы погружений I_1, I_2.

Доказать, что $JI_1=I_2$. [*Указание*: применить задачу 16. Другой способ: пусть γ — кривая в M, начинающаяся в m, $n=I_1(m)$; показать, что развертка $I_1\circ\gamma$ в N_n зависит только от вторых фундаментальных форм вдоль γ и от развертки γ в M_m.]

Задача 18. Пусть $g\colon N\to R$ — дифференцируемая функция. Показать, что

$$M=g^{-1}(0)\cap\{n\,|\,dg(n)\neq 0\}$$

является гиперповерхностью в N.

Задача 19. Пусть $g\colon R^f\to R$ — дифференцируемая функция, R^f снабжено евклидовой метрикой, индуцирующей метрику на многообразии M из задачи 18. Показать, что

(а) Во всякой точке $m\in M$ существует единственная единичная нормаль z_1, такая, что $dg(z_1)=a>0$. Эти нормальные векторы образуют дифференцируемое поле в $\perp(M)$, так что M ориентируемо.

(б) Пусть M' — линейная гиперповерхность в R^f, проходящая через точку $m \in M$ и ортогональная к $\perp z_1$; показать, что вторая фундаментальная форма H_1 многообразия M в точке m представляется в виде $H_1(x, y) = (1/a)\, H_{g'}(x, y)$, где $g' = g|_{M'}$, $x, y \in M_m$.

(в) Пусть $x = \sum a_i D_i(m)$, $y = \sum b_i D_i(m)$, и пусть $X = \sum a_i D_i$, $Y = \sum b_i D_i$; тогда в M кривизна плоскости, натянутой на x и y, есть $K_0(x, y) = (1/a^2)\{x(Xg)\, y(Yg) - (x(Yg))^2\}$.

Задача 20. С помощью формулы для K_0, приведенной в задаче 19(в), показать, что кривизна сферы радиуса r, $S^d = g^{-1}(0)$, где $g = \sum u_i^2 - r^2 : R^{d+1} \to R$, постоянна и равна $1/r^2$.

Задача 21. *Линейчатая поверхность* — это гиперповерхность в R^3, через каждую точку которой проходит прямая *(образующая)* в R^3, содержащаяся в этой поверхности. Показать, что кривизна линейчатой поверхности неположительна.

Задача 22. Пусть γ — образующая линейчатой поверхности, являющаяся базисной кривой C^∞-прямоугольника, в котором образующие служат продольными кривыми, параметризованными длиной дуги.

(а) Пользуясь тем, что ассоциированное векторное поле V является якобиевым в R^3, показать, что его можно представить в виде $V = uA + B$, где A, B параллельны вдоль γ в R^3. Далее, если начальная трансверсальная прямая выбрана надлежащим образом, то A, B и γ_* можно сделать взаимно ортогональными.

(б) Пользуясь тем, что V является также якобиевым полем на самой поверхности, вывести, что $E^2 V = -KV$, где K — кривизна вдоль γ, E — ковариантная производная на поверхности относительно γ_*.

(в) Пользуясь тем, что EV, $E^2 V$ — проекции DV, $D(EV)$ на касательную плоскость к поверхности (предложение 1), выразить $E^2 V$ явно в терминах $\langle A, A\rangle$ и $\langle B, B\rangle$, получив, таким образом, формулу для K вдоль γ.

Задача 23. Поверхность в R^3 называется *дважды линейчатой,* если через каждую ее точку проходят две принадлежащие ей различные прямые. Доказать, что дважды линейчатая плоская поверхность ($K=0$) должна быть плоскостью.

Задача 24. Пусть M погружено в R^d, I: $M \to R^d$, таким образом, что последняя координата $v_d = u_d \circ I$ всегда положительна на M. Пусть через I' обозначены первые $d-1$ координат погружения I, так что $I = (I', v_d)$. Рассматривая R^d как подпространство в R^{d+e} последние e координат которого равны нулю, мы получим погружение J многообразия $M \times S^e$, полагая

$$J(m, x) = (I'(m), v_d(m)x).$$

Говорят, что $M \times S^e$ погружено как *многообразие частичного вращения.* Если M — кривая в R^2, то $J(M \times S^e)$ — *гиперповерхность вращения.*

Снабдим M метрикой, индуцированной I, а $M \times S^e$ — метрикой, индуцированной J.

(а) Показать, что $M \times \{x\} \subset M \times S^e$ — вполне геодезическое подмногообразие для каждого $x \in S^e$ и изометрично M.

(б) Показать, что $\{m\} \times S^e \subset M \times S^e$ — вполне геодезическое подмногообразие тогда и только тогда, когда m — критическая точка функции v_d и в этом случае $\{m\} \times S^e$ изометрично e-сфере радиуса $v_d(m)$.

(в) J является вложением тогда и только тогда, когда таковым является I.

Задача 25. *Произведения сфер как гиперповерхности.* Если в задаче 24 положить $M = S^d$, то M вкладывается в R^{d+1} как сдвинутая обычная сфера S^d, такая, что $v_d > 0$. Тогда J определяет вложение $S^d \times S^e$ как гиперповерхности.

(а) Вычислить кривизну $K(X, Y)$ в следующих случаях:

(I) X и Y — касательные к S^d.

(II) X — касательная к S^d, Y — касательная к S^e.

(III) X и Y — касательные к S^e.

(б) Обобщить это на вложение произведения любого числа сфер как гиперповерхности; выяснить, что́ можно сказать о вполне геодезических многообразиях и кривизне. Частный случай — обычное вложение тора как поверхности баранки.

Задача 26. Пусть M — ориентируемая гиперповерхность в R^{d+1}, N — подмногообразие, содержащееся в ограниченной области в R^{e+1}. Рассматривая $R^{d+1} \subset \subset R^{d+e+1}$, получим нормальное расслоение над M, слои которого имеют размерность $e+1$; поскольку M ориентируемо, то это нормальное расслоение имеет $e+1$ независимое глобальное сечение.

(а) Показать, что существует положительная C^∞-функция r на M, такая, что экспоненциальное отображение R^{d+e+1} является диффеоморфизмом на

$$\perp_r(M) = \{(m, x) \in \perp(M) \mid \|x\| < r(m)\}.$$

(б) Показать, что $M \times N$ можно вложить в R^{d+e+1}.

(в) Пусть M компактно. Показать, что функцию r можно взять постоянной и, следовательно, построить такое вложение $M \times N$, чтобы индуцированная метрика имела вид

$$\langle s+t, s'+t' \rangle = \langle s, s' \rangle_n + c \langle t, t' \rangle_2,$$

где s, $s' \in M_m$, t, $t' \in N_n$, $\langle \, , \rangle_n$ — метрика на M, являющаяся дифференцируемой функцией от $n \in N$, $\langle \, , \rangle_2$ — метрика на N, индуцированная из R^{e+1}, и c — постоянная.

(г) Если M, N только погружены, то эта процедура приводит к погружению $M \times N$. Придумать пример, когда M не вложено, а N вложено, однако при некотором непостоянном r получается вложение $M \times N$.

Замечание. Если M есть S^d, то процедура пункта (в) дает $N \times S^d$ как подмногообразие частичного вращения.

Задача 27. Пусть M — гиперповерхность в R^{d+1}. Показать, что преобразование кривизны, рассматриваемое как симметрическое линейное преобразование бивекторов, является диагональным относительно базиса разложимых бивекторов и имеет характеристические значения $\lambda_i\lambda_j$, $i<j$, где λ_i — характеристические значения второй фундаментальной формы. Эти λ_i — классические *главные кривизны.*

Задача 28. Пусть M — гиперповерхность в N, и кривизна N постоянна. Вывести следующие соотношения между второй фундаментальной формой и кривизной в точке m:

(а) Кривизна в m постоянна и совпадает с кривизной N в том и только в том случае, если вторая фундаментальная форма имеет ранг 0 или 1.

(б) Разность между преобразованиями кривизны M и N (суженными на M_m) имеет область значений в фиксированном двумерном подпространстве в M_m в том и только в том случае, если ранг второй фундаментальной формы равен 2.

(в) Если ни (а), ни (б) не имеют места, то кривизна определяет вторую фундаментальную форму.

Задача 29. *Классическая теорема жесткости.* Пусть N — однородное риманово многообразие постоянной кривизны k. Пусть I_i: $M \to N$, $i=1, 2,$ — погружения M как гиперповерхности. *Типовое число* $t(m)$ точки $m \in M$ — это ранг второй фундаментальной формы в m; в силу задачи 28, если $t(m) \geqslant 2$, то $t(m)$ определяется кривизной независимо от погружения, за исключением точек, где M имеет постоянную кривизну k.

Доказать, что если $t(m) > 2$, то существует такая изометрия J многообразия N, что $JI_1 = I_2$.

Задача 30. Если M — гиперповерхность в R^{d+1}, то *гауссова кривизна* M определяется как вещественная функция k на M по формуле $k(m) = \det S_z$, где S_z — преобразование второй фундаментальной формы для нормали z в точке m.

(а) Показать, что k вполне определено, когда d четно, но лишь с точностью до знака, если d нечетно.

(б) Показать, что $k(m)$ зависит только от метрики на M, найти формулу для $k(m)$ в терминах кривизны.

В частности, при $d=2$ функция k совпадает с кривизной.

Задача 31. Показать, что преобразования кривизны в точке 3-мерного риманова многообразия можно реализовать как преобразования кривизны в точке гиперповерхности в R^4.

Задача 32. Пусть M — полная гиперповерхность в R^{d+1}, такая, что группа голономии многообразия M приводима, т. е. существует распределение V на M размерности e, $e\neq 0$, d, инвариантное относительно параллельного переноса на любой кривой. Тогда ортогональное дополнение $V^{\perp}$ — такое же распределение.

Предположим, что множество точек, в которых кривизна отлична от 0, плотно в M. Показать, что

(а) Вторая фундаментальная форма равна нулю на V или $V^{\perp}$, например на V.

(б) Параллельный перенос элементов V в M совпадает с их параллельным переносом в R^{d+1}.

(в) Линейное подмногообразие в R^{d+1} размерности e с касательным пространством V_m, где m — произвольная точка в M, содержится в M, и прямые этого линейного подмногообразия являются геодезическими в M.

(г) Если R^{d-e+1} — линейное подпространство в R^{d+1}, перпендикулярное к V, то $M\cap R^{d-e+1}=N$ есть гиперповерхность в R^{d-e+1} и M вложено в R^{d+1} как риманово произведение $N\times R^e\subset R^{d-e+1}\times R^e$.