ГЛАВА 11

Вторая вариация длины кривой

Рассматриваются первая и вторая вариации длины кривой; выводится формула Синга для неинтегрированной второй вариации, а также некоторые ее частные случаи. Определяется индексная форма при общих условиях для концевых точек; после изучения элементарных свойств фокальных и сопряженных точек доказывается теорема Морса об индексе при фиксированной концевой точке. Рассматриваются точки минимума и замкнутые геодезические, а также различные формулировки выпуклости. В заключение приводится вариант теоремы сравнения Рауха и несколько следствий относительно связи кривизны с объемом [22, 33, 85].

11.1. Первая и вторая вариации длины кривой

Приступим к изучению соотношения между длинами продольных кривых прямоугольника и ассоциированным векторным полем. Если базисная кривая является геодезической, а начальный и конечный углы ассоциированного векторного поля подчинены некоторым разумным условиям, то производная длины по трансверсальному параметру равна нулю. Поэтому в данном случае вторая производная показывает, насколько близкие кривые отличаются по длине от базисной кривой.

В общем случае эти первая и вторая производные от длины продольных кривых задаются дифференцированием по трансверсальному параметру под знаком интеграла интегрального выражения длины. Получаются так называемые *первая и вторая вариации длины* кривой прямоугольника в интегральной форме.

Ломаный C^∞-*прямоугольник* Q — это отображение $[a, b]\times[c, d]\to M$, такое, что при некотором конечном разбиении $u_0=a<u_1<\ldots<u_{n-1}<u_n=b$ отрезка $[a, b]$ сужения Q на $[u_{i-1}, u_i]\times[c, d]$ являются C^∞-прямоугольниками, $i=1, \ldots, n$.

Задача 1. (а) Показать, что ломаный C^∞-прямоугольник непрерывен.

(б) Если Q — ломаный C^∞-прямоугольник, то $dQ(D_2(u, v))$ однозначно определено в любой точке (u, v) области определения Q, порождая ломаный C^∞-прямоугольник в $T(M)$.

(в) В то же время определение $dQ(D_1(u_i, v))$ не обязательно однозначно.

(г) Если M обладает римановой структурой, то ломаный C^∞-прямоугольник допускает канонический подъем в $F(M)$, определенный в § 8.1.

(д) Если τ — ломаная C^∞-кривая в M и V — ломаный C^∞-подъем τ в $T(M)$, то существует ломаный C^∞-прямоугольник Q, для которого τ — базисная кривая и $V(u)=dQ(D_2(u, 0))$ при $u\in[a, b]$, т. е. V — *векторное поле, ассоциированное с* Q.

(е) Если Q — ломаный C^∞-прямоугольник, ω — форма на M, то $Q^*\omega$ не определено однозначно на вертикальных линиях $u=u_i$, хотя можно по непрерывности определить $Q^*\omega(D_2)$; все же на этих линиях $Q^*\omega(D_1)$ имеет правый и левый пределы $Q^*\omega(D_1)(u_i^+, v)$ и $Q^*\omega(D_1)(u_i^-, v)$ соответственно.

Пусть теперь Q — ломаный C^∞-прямоугольник в M, определенный на $[a, b]\times[0, 1]$, с ассоциированным векторным полем V и продольными кривыми τ_y, $y\in[0, 1]$. Тогда длиной τ_y служит

$$l(y)=\int_a^b \|dQ(D_1)\|(u, y)\,du.$$

Поэтому

$$l'(0)=\int_b^a D_2\|dQ(D_1)\|(u, 0)\,du$$

и

$$l''(0)=\int_b^a D_2^2\|dQ(D_1)\|(u, 0)\,du$$

—первая и вторая вариации длины дуги. Подинтегральные выражения $D_2\|dQ(D_1)\|(u, 0)$ и $D_2^2\|dQ(D_1)\|(u, 0)$ называются *неинтегрированными первой и второй вариациями длины дуги.*

Пусть $\bar{Q}$ — канонический подъем Q в $F(M)$. В обозначениях § 8.1 функции $\omega^Q(D_1)$, $\omega^Q(D_2)$, $\varphi^Q(D_1)$ и т. д. определены в R^2 и принимают значения в R^d или $\mathfrak{o}(d)$. Функции $\omega^Q(D_2)$ и $\varphi^Q(D_2)$ определены и являются C^∞-ломаными на всем $[a, b]\times[0, 1]$, тогда как $\omega^Q(D_1)$ может иметь разрывы на вертикалях $u=u_i$; однако в любом случае существуют ее правые и левые пределы и производные в этих точках. Далее, $\varphi^Q(D_1)=0$, поскольку продольные линии прямоугольника $\bar{Q}$ горизонтальны.

Подставляя D_1, D_2 в структурные уравнения, получаем

$$(1)\quad D_1\omega^Q(D_2)-D_2\omega^Q(D_1)= \\ =-\varphi^Q(D_1)\,\omega^Q(D_2)+\varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1)= \\ =\varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1);$$

$$(2)\quad D_1\varphi^Q(D_2)-D_2\varphi^Q(D_1)=D_1\varphi^Q(D_2)= \\ =-[\varphi^Q(D_1),\ \varphi^Q(D_2)]+\Phi^Q(D_1,\ D_2)= \\ =\Phi^Q(D_1,\ D_2).$$

Скалярные произведения продольных и трансверсальных векторных полей прямоугольника Q определяются соответствующими скалярными произведениями $\omega^Q(D_1)$ и $\omega^Q(D_2)$.

Лемма 1. Пусть Q есть C^∞-прямоугольник, и пусть касательные к базисной кривой Q имеют постоянную длину C. Тогда

$$l'(0)=-\frac{1}{C}\int_a^b\langle\omega^Q(D_2),\ D_1\omega^Q(D_1)\rangle(u,\ 0)\,du+ \\ +\frac{1}{C}\,[\langle\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle(b,\ 0)-\langle\omega^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1)\rangle(a,\ 0)]$$

Доказательство. В соответствии с последним замечанием,

$$D_2\|dQ(D_1)\|(u,\ 0)=D_2\langle\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle^{1/2}(u,\ 0)=$$
$$=\frac{1}{C}\langle D_2\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle(u,\ 0)=$$
$$=\frac{1}{C}\langle D_1\omega^Q(D_2)-$$
$$-\varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle(u,\ 0)=$$
$$=\frac{1}{C}\langle D_1\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle(u,\ 0)=$$
$$=\frac{1}{C}D_1\langle\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle(u,\ 0)-$$
$$-\frac{1}{C}\langle\omega^Q(D_2),\ D_1\omega^Q(D_1)\rangle(u,\ 0);$$

мы воспользовались (1) и кососимметричностью $\varphi^Q(D_2)$. Поэтому

$$l'(0)=-\frac{1}{C}\int\limits_a^b\langle\omega^Q(D_2),\ D_1\omega^Q(D_1)\rangle(u,\ 0)\,du+$$
$$+\frac{1}{C}\langle\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle(u,\ 0)\Big]_a^b.\qquad \text{Ч. т. д.}$$

Следствие 1. Если Q — ломаный C^∞-прямоугольник, касательные к базисной кривой которого имеют постоянную длину C, то

$$l'(0)=-\frac{1}{C}\int\limits_a^b\langle\omega^Q(D_2),\ D_1\omega^Q(D_1)\rangle(u,\ 0)\,du+$$
$$+\frac{1}{C}\sum_{i=1}^{n}\left\{\langle\omega^Q(D_2)(u_i,\ 0),\ \omega^Q(D_1)(u_i^-,\ 0)\rangle-\right.$$
$$\left.-\langle\omega^Q(D_2)(u_{i-1},\ 0),\ \omega^Q(D_1)(u_{i-1}^+,\ 0)\rangle\right\}.$$

Следствие 2. Если базисная кривая ломаного C^∞-прямоугольника Q является (не ломаной) геодезической и $\langle\omega^Q(D_2),\omega^Q(D_1)\rangle(b,\ 0)=\langle\omega^Q(D_2),\omega^Q(D_1)\rangle(a,0)$, то $l'(0)=0$. В частности, $l'(0)=0$, если трансверсальные кривые перпендикулярны к базисной геодезической.

Доказательство. Базисная кривая является геодезической в том и только в том случае, если $\omega^Q(D_1)$ принадлежит C^∞ и $D_1\omega^Q(D_1)(u, 0)=0$ для каждого u. При сделанных предположениях подинтегральное выражение в следствии 1 равно нулю, и вся сумма сводится к

$$\langle\omega^Q(D_2), \omega^Q(D_1)\rangle(b, 0)-\langle\omega^Q(D_2), \omega^Q(D_1)\rangle(a, 0)=0.$$

Следствие 3. Пусть N, P — подмногообразия в M; будем рассматривать только ломаные C^∞-прямоугольники, начальные и конечные трансверсали которых находятся в N и P. Для всех таких прямоугольников с данной базисной кривой τ $l'(0)=0$ в том и только в том

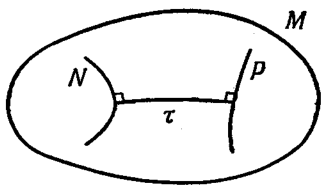

Рис. 36.

случае, если τ — геодезическая от N до P, перпендикулярная к обоим многообразиям.

Доказательство. Основная идея: существуют прямоугольники с настолько широким выбором $\omega^Q(D_2)$, что из выражения для $l'(0)$ и равенства $l'(0)=0$ следует, что $D_1\omega^Q(D_1)(u, 0)=0$; это приводит к отсутствию изломов у кривой τ и ее перпендикулярности к N и P в конечных точках.

Пусть $\bar{\tau}$ — горизонтальный подъем τ в $F(M)$ и $r\neq u_i$; определим в R^d кривую γ, положив $\gamma(u)=f(u)D\omega(\bar{\tau}_*)(u)$, где $f(u)$ — неотрицательная C^∞-функция, положительная в точке r и равная нулю в каждой точке u_i. Тогда $V=\bar{\tau}\gamma$ — подъем τ в $T(M)$, и можно определить прямоугольник $Q(u, v)=\exp_{\tau(u)}vV(u)$. Легко видеть, что для этого Q

$$\langle\omega^Q(D_2), D_1\omega^Q(D_1)\rangle(u, 0)=f(u)\,\|D_1\omega^Q(D_1)\|^2(u, 0)$$

и что в соответствующей сумме из следствия 1 все слагаемые обращаются в нуль. Поэтому из равенства $l'(0)=0$ вытекает, что

$$\int_a^b f(u)\,\|D_1\omega^Q(D_1)\|^2(u,\ 0)\,du=0,$$

откуда $D_1\omega^Q(D_1)(r,\ 0)=0$.

Сама эта сумма исследуется аналогичным образом. Равенство $\langle t,\ \tau_*(u_i^+)-\tau_*(u_i^-)\rangle=0$ для любого $t\in M_{\tau(u_i)}$, $0<i<n$, доказывается с помощью такого же прямоугольника Q, порожденного векторным полем, полученным параллельным переносом t вдоль τ с последующим умножением на неотрицательную функцию, положительную вблизи точки u_i, но равную нулю вне ее окрестности.

Для проверки перпендикулярности в концах τ можно взять прямоугольники, продольные кривые которых состоят из коротких геодезических сегментов, соединяющих $\gamma(v)$ с $\tau(a+\varepsilon)$, и сегмента $\tau|_{[a+\varepsilon,\ b]}$, где γ — кривая в N с $\gamma(0)=\tau(a)$; другой конец исследуется аналогично.

Задача 2. Показать (независимо от гл. 8), что кривая, минимизирующая расстояние между двумя точками, является геодезической. (В классическом анализе геодезическая определялась как решение вариационной задачи отыскания минимальных кривых, откуда уже как следствие вытекало условие самопараллельности $\nabla_{\gamma_*}\gamma_*=$ $=0$.)

В нашем применении вариационного исчисления используется вариация геодезической лишь в направлении, перпендикулярном к этой геодезической в каждой ее точке, т. е. рассматриваются только прямоугольники с базисными геодезическими кривыми, ассоциированные поля которых перпендикулярны к этим кривым. Для более полного оправдания такого ограничения докажем следующее замечание, которое показывает, что для C^∞-прямоугольников, удовлетворяющих концевым условиям, это предположение нисколько не приводит к потере общности. Замечание не верно для *ломаных* C^∞-прямоугольников, если только не допускать кусочно линейных замен параметра базисной геодезической.

Замечание. Если Q есть C^∞-прямоугольник с геодезической базисной кривой, концевые трансверсали которого перпендикулярны к ней, то существует частичная репараметризация Q, при которой продольные кривые оказываются репараметризациями продольных кривых Q, а ассоциированное векторное поле перпендикулярно к базисной кривой.

Доказательство. Пусть V — ассоциированное векторное поле прямоугольника Q, τ — базисная кривая Q, тогда $f=\langle V, \tau_*\rangle$ — вещественная функция на $[a, b]$. По предположению, $f(a)=f(b)=0$. Определим отображение F: $[a, b]\times[c, c+\varepsilon]\to[a, b]\times[c, d]$, положив

$$F(u, v)=\left(u-\frac{1}{k}vf(u), v\right),$$

где $\varepsilon>0$ таково, что значения F принадлежат $[a, b]\times[c, d]$ и $k=\langle\tau_*, \tau_*\rangle$. Тогда прямоугольник $Q\circ F$ удовлетворяет предъявленным требованиям.

Задача 3. Доказать, что векторное поле, ассоциированное с прямоугольником $Q\circ F$, перпендикулярно к τ.

В дальнейшем предполагается, что все ломаные C^∞-прямоугольники имеют геодезические базы, перпендикулярные к ассоциированным векторным полям. Для удобства также предполагается, что базисная кривая нормализована таким образом, что ее касательные векторы единичны, а начальное значение параметра $a=0$, откуда ее длина равна $b=b-a$.

Лемма 2 (формула Синга [68]). Неинтегрированная вторая вариация допускает представление

$$D_2^2\|\omega^Q(D_1)\|=$$
$$=\|D_1\omega^Q(D_2)\|^2-K(dQ(D_1), dQ(D_2))\|\omega^Q(D_2)\|^2+$$
$$+D_1\{\langle\omega^Q(D_1), D_2\omega^Q(D_2)\rangle+\langle\omega^Q(D_1), \varphi^Q(D_2)\omega^Q(D_2)\rangle\},$$

где все функции сужены на $[0, b]\times\{0\}$.

Доказательство проведем прямым вычислением, помня, что везде опускается аргумент $(u,\ 0)$:

$$D_2^2\|\omega^Q(D_1)\| = D_2\left(D_2\langle\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle^{1/2}\right) =$$
$$= -\langle D_2\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle^2 + D_2\langle D_2\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle,$$

так как множители, появляющиеся в знаменателях, являются степенями выражения $\langle\omega^Q(D_1),\ \omega^Q(D_1)\rangle(u,\ 0)=1$.

Далее, используя первое структурное уравнение (1) и кососимметричность $\varphi^Q(D_2)$, получаем, что

$$\text{(а)}\quad D_2^2\|\omega^Q(D_1)\| = -\langle D_1\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle^2 + D_2\langle D_1\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle.$$

Базисная кривая τ — геодезическая, так что $D_1\omega^Q(D_1)=0$, откуда

$$\langle D_1\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle^2 = (D_1\langle\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle)^2 = 0,$$

поскольку ассоциированное поле перпендикулярно к τ.

$$\text{(б)}\quad D_2\langle D_1\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle = \langle D_2D_1\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle + \langle D_1\omega^Q(D_2),\ D_2\omega^Q(D_1)\rangle,$$

$$\text{(в)}\quad \langle D_2D_1\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle = \langle D_1D_2\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle = D_1\langle D_2\omega^Q(D_2),\ \omega^Q(D_1)\rangle,$$

$$\text{(г)}\quad \langle D_1\omega^Q(D_2),\ D_2\omega^Q(D_1)\rangle = \langle D_1\omega^Q(D_2),\ D_1\omega^Q(D_2) - \varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1)\rangle$$

$$\text{(д)}\quad \langle D_1\omega^Q(D_2),\ \varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1)\rangle = D_1\langle\omega^Q(D_2),\ \varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1)\rangle - \langle\omega^Q(D_2),\ (D_1\varphi^Q(D_2))\,\omega^Q(D_1)\rangle,$$

$$\text{(е)}\quad \langle\omega^Q(D_2),\ (D_1\varphi^Q(D_2))\,\omega^Q(D_1)\rangle = \langle\omega^Q(D_2),\ \Phi^Q(D_1,\ D_2)\,\omega^Q(D_1)\rangle = -K(dQ(D_1),\ dQ(D_2))\,\|\omega^Q(D_2)\|^2.$$

Теперь желаемый результат достигается подстановкой выражений (а) — (б) в предшествующие им и, наконец, в (а).

Следствие 1. Пусть V — ассоциированное векторное поле вдоль базисной геодезической τ, V' — ковариантная производная относительно τ_*; пусть, наконец, $\bar{V}$ — трансверсальное векторное поле прямоугольника Q. Тогда

$$l''(0) = \int_0^b (\| V' \|^2 (u) - K(V) \| V \|^2 (u)) \, du + \langle \tau_*, \nabla_V \bar{V} \rangle |_0^b$$

$(K(V) = K(V, \tau_*)$, см. § 9.4).

Это вытекает из того, что $V'(u) = \tau(D_1 \omega^Q (D_2)(u, 0))$ и $\nabla_V \bar{V} = \bar{Q}(D_2 + \varphi^Q(D_2)) \omega^Q (D_2)$ (см. теорему 6.11).

Следствие 2. Пусть N и P — подмногообразия, Q — прямоугольник с геодезической базой τ, перпендикулярной к N и P. Тогда

$$l''(0) = \int_0^b (\| V' \|^2 (u) - K(V) \| V \|^2 (u)) \, du +$$
$$+ \langle S_{\tau_*(0)} V(0), V(0) \rangle - \langle S_{\tau_*(b)} V(b), V(b) \rangle,$$

где S — вторая фундаментальная форма соответствующего многообразия и, как и раньше, V — ассоциированное векторное поле.

Доказательство. В указанном выражении интеграл совпадает с интегралом из следствия 1. В силу предложения 10.1, если $T_{V(0)}$ — преобразование разности в $M_{\tau(0)}$, порожденное N как подмногообразием в M, то для векторного поля W на N

$$T_{V(0)} W(\tau(0)) = D_{V(0)} W - E_{V(0)} W.$$

Но $E_{V(0)} W$ перпендикулярно к $\tau_*(0)$, откуда для $W = \bar{V}$

$$\begin{aligned} \langle \tau_*(0), D_{V(0)} \bar{V} \rangle &= \langle \tau_*(0), T_{V(0)} V(0) \rangle = \\ &= -\langle T_{V(0)} \tau_*(0), V(0) \rangle = \\ &= -\langle S_{\tau_*(0)} V(0), V(0) \rangle. \end{aligned}$$

Аналогично получается последнее слагаемое.

Заметим, что когда N и P — точки, то указанная формула для второй вариации сводится к такой формуле:

$$l''(0)=\int_0^b (\|V'\|^2(u)-K(V)\|V\|^2(u))\,du.$$

Следствие 3. Если в следствии 2 поле V якобиево, то

$$l''(0)=\langle S_{\tau_*(0)}V(0)-V'(0),\ V(0)\rangle-$$
$$-\langle S_{\tau_*(b)}V(b)-V'(b),\ V(b)\rangle.$$

Это получается из уравнения Якоби и интегрирования по частям.

11.2. Индексная форма

Пусть N и P — подмногообразия в M, τ — геодезический сегмент, перпендикулярный к N и P в его концах $\tau(0)$ и $\tau(b)$. Пусть $\mathscr{L}$ — линейное пространство ломаных векторных C^∞-полей вдоль τ, которые перпендикулярны к τ и начальные и конечные векторы которых касательны к N и P. *Индексная форма* геодезической τ — это билинейная форма на $\mathscr{L}$, определенная следующим образом: если $V,\ W\in\mathscr{L}$, то

$$I(V,\ W)=\int_0^b (\langle V',\ W'\rangle(u)-\langle R_{\tau_*V}\tau_*,\ W\rangle(u))du+$$
$$+\langle S_{\tau_*(0)}V(0),\ W(0)\rangle-\langle S_{\tau_*(b)}V(b),\ W(b)\rangle.$$

Грубо говоря, если рассматривать функцию длины, определенную на множестве кривых от N до P, то следствие 3 леммы 1 показывает, что критические точки этой функции являются геодезическими, такими, как τ. Индексную форму можно рассматривать как естественное обобщение гессиана функции в критической точке, поскольку она является симметрической билинейной формой, ассоциированной с квадратичной формой $l''(0)$ поля V из следствия 2 леммы 2. В теории Морса исследуется это обобщение.

Если заметить, что вне точек недифференцируемости V $(u_0=0,\ \dots,\ u_n=b)$

$$\langle V',\ W'\rangle=\langle V',\ W\rangle'-\langle V'',\ W\rangle,$$