так что, в силу непрерывности, $f(r) \geqslant g(r)$ для любого $r \in (0, b]$.

Следствие 1. В указанных предположениях первая точка, сопряженная с n, должна встретиться раньше, чем первая точка, сопряженная с m.

Следствие 2 (Бонне). Пусть кривизны всех плоских сечений многообразия M, касательных к некоторой геодезической γ, начинающейся в m, удовлетворяют неравенствам $0 < L \leqslant K(P) \leqslant H$, где L и H — константы. Тогда если s — расстояние вдоль γ до первой точки, сопряженной с m на γ, то $\pi/H^{1/2} \leqslant s \leqslant \pi/L^{1/2}$.

Доказательство. Этот результат вытекает непосредственно из следствия 1 и сравнения со сферами постоянной кривизны L и H.

Замечание. Предположения теоремы Синга (теорема 11) можно ослабить, потребовав вместо компактности полноты и строго положительной кривизны.

Задача 36. Обобщить теорему Рауха, заменив точки m и n вполне геодезическими подмногообразиями равной размерности.

Теорема сравнения Рауха и результаты Клингенберга о замкнутых геодезических применяются при исследовании «ущемленных» многообразий, а также при доказательстве теоремы Топоногова о геодезических треугольниках [6—9, 28—30, 64—66, 74—76].

11.10. Кривизна и объем [10, 11, 18]

Преобразования Риччи R_x: $y \to R_{xy}x$ продолжаются до дифференцирований алгебры Грассмана; так как R_x симметрично относительно $\langle\ ,\ \rangle$, то эти продолжения симметричны относительно естественного продолжения $\langle\ ,\ \rangle$ (задача 4.14). Пусть $y_1, \ldots, y_p, x$ — ортонормальные векторы, и P есть p-плоскость, натянутая на $y_1, \ldots, y_p$. Тогда *p-средней кривизной* вектора x и плоскости P называется скалярное произведение $K(x, P) = \langle R_x(y_1, \cdots \cdots y_p), y_1, \cdots, y_p\rangle$. В частности, существует единственная $(d-1)$-плоскость, ортогональная к x; ее $(d-1)$-средняя кривизна $K(x, x^{\perp})$ называется просто *средней кривизной* (или *кривизной Риччи*) вектора x.

Задача 37. Показать, что $K(x, P) = \Sigma K(x, y_i)$, и потому такие суммы зависят только от плоскости, натянутой на y_i. Далее, $K(x, x^{\perp}) = \mathrm{tr}\, R_x$.

Пусть γ — геодезическая, начинающаяся в точке m, $\gamma = \exp_m \circ \rho$, где ρ — луч в M_m, параметризованный длиной дуги. Пусть $J_p(t)$ — максимальный из коэффициентов, на которые $\exp_m$ умножает длины разложимых p-векторов, нормальных к ρ в точке $\rho(t)$, т. е. $J_p(t)$ равен максимуму отношения

$$\|d \exp_m s_1 \cdots d \exp_m s_p\| / \|s_1 \cdots s_p\|,$$

где s_i — линейно независимые касательные к M_m, нормальные к ρ в точке $\rho(t)$. Аналогично, пусть $j_p(t)$ — минимум такого отношения. В частности, $J_{d-1}(t) = j_{d-1}(t)$ — якобиан отображения $\exp_m$ в точке $\rho(t)$. Заметим, что $J_p(0) = j_p(0) = 1$.

Теорема 15. Предположим, что m не имеет сопряженных точек на $\gamma((0, c])$, и пусть через (p) обозначено следующее условие: $K(\gamma_*(t), P) \geqslant pa^2$ для каждого t и каждой p-плоскости P, нормальной к γ в точке $\gamma(t)$.

(1) Если выполнено условие (p), то $J_p(t) \leqslant (\sin at/at)^p$ при $t \in (0, c]$.

(2) Предположим, что $K(\gamma_*(t), y) \leqslant b^2$ для каждого t и каждого вектора y, нормального к γ в точке $\gamma(t)$. Тогда $j_p(t) \geqslant (\sin bt/bt)^p$ при $t \in (0, c]$.

В случае $p = d-1$ можно утверждать большее, а именно, что в (1) функция $J_{d-1}(t)\,(at/\sin at)^{d-1}$ не возрастает относительно t и что в (2) функция $J_{d-1}(t)\,(bt/\sin bt)^{d-1}$ не убывает относительно t.

Мы не предполагаем, что a, b вещественны, но используем комплексное продолжение $\sin$ в случае, когда a^2 или b^2 отрицательно; если a или $b=0$, то $at/\sin at$ или $bt/\sin bt$ заменяется на 1.

Доказательство. Пусть $s_1, \ldots, s_p$ — независимые векторы, нормальные к ρ в точке $\rho(t)$. Эти s_i

порождают линейные однородные поля вдоль ρ, которые при $d\exp_m$ проектируются в p независимых m-якобиевых полей. Так возникает гладкое поле P p-плоскостей, порожденных этими m-якобиевыми полями вдоль кривой γ. Пусть f: $[0, t]\to R$ — функция, которая задает отношения, соответствующие P; тогда $f(0)=1$ и $f(t)$ является типичным отношением, для которого $J_p(t)$ служит максимумом, а $j_p(t)$ — минимумом. В частности, если $p=d-1$, то P единственно и $f=J_{d-1}=j_{d-1}$.

Если m-якобиевы поля $Y_1, \ldots, Y_p$ порождают поле P при каком-то одном значении параметра из $(0, t]$, то они порождают его и при всех значениях. Пусть $Y_i=d\exp_m uA_i$, где A_i — постоянные поля вдоль ρ в M_m; тогда $f=\|Y_1 \cdots Y_p\|/u^pA$, где $A=\|A_1 \cdots A_p\|$ — константа. Предположим теперь, что $Y_1(r), \ldots, Y_p(r)$ ортонормальны; для каждого $r\in(0, t]$ найдется такое множество полей Y_i. Тогда

$$\begin{aligned}\langle Y_1 \cdots Y_p, Y_1 \cdots Y_p\rangle'(r)&=\\ &=2\sum\langle Y_1 \cdots Y_i' \cdots Y_p, Y_1 \cdots Y_p\rangle(r)=\\ &=2\sum\langle Y_i', Y_i\rangle(r);\end{aligned}$$

это вытекает из того факта, что базис p-векторов, порожденный ортонормальным векторным базисом, сам является ортонормальным. [Разложить $Y_i'(r)$ в ортонормальном базисе, включающем $Y_1(r), \ldots, Y_p(r)$, и продолжить на $(0, t]$.] Воспользовавшись этим, продифференцируем f^2 и получим

$$\text{(a)}\qquad f'(r)/f(r)=\sum\langle Y_i', Y_i\rangle(r)-p/r.$$

Если W_i — векторное поле вдоль γ, причем $W_i(0)=0$ и $W_i(r)=Y_i(r)$, то, в силу основного неравенства,

$$\langle Y_i', Y_i\rangle(r)=I_r(Y_i)\leqslant I_r(W_i),$$

где $I_r=I(m, N_r)$ с промежуточным подмногообразием N_r, вторая фундаментальная форма которого равна нулю. В частности, если E_i — параллельное поле, порожденное $Y_i(r)$, и g — ломаная C^∞-функция, такая, что $g(0)=0$,

$g(r)=1$, то, полагая $W_i=gE_i$, получим

$$\langle Y_i', Y_i\rangle(r)\leqslant\int\limits_0^r\left((g')^2-K(\gamma_*, E_i)g^2\right)du.$$

Суммируя эти неравенства и используя предположение

$$(p)\colon\ \sum K(\gamma_*, E_i)\geqslant pa^2,$$

выводим из (а), что

$$f'(r)/f(r)\leqslant p\Big(\int\limits_0^r((g')^2-a^2g^2)\,du-1/r\Big).$$

Интеграл в этом неравенстве совпадает с второй вариацией векторного поля gE, где E — параллельное единичное поле на пространстве постоянной кривизны a^2. Таким образом, в силу основного неравенства, g лучше всего выбрать так, чтобы gE оказалось якобиевым полем. Поэтому $g=\sin au/\sin ar$ и интеграл принимает значение

$$\langle g'E,\ gE\rangle(r)=a\cos ar/\sin ar.$$

(Если $a=0$, то полагаем $g=u/r$.) Проинтегрируем полученное неравенство:

$$\text{(б)}\qquad f'(r)/f(r)\leqslant p(a\cos ar/\sin ar-1/r)$$

от q до t, $q\in(0,\ t)$, возьмем экспоненту и получим

$$f(t)\,(at/\sin at)^p\leqslant f(q)\,(aq/\sin aq)^p.$$

В случае $p=d-1$ это влечет желаемую монотонность функции $J_{d-1}(t)\,(at/\sin at)^{d-1}$. В остальных случаях переходим к пределу при $q\to0_+$; поскольку $f(0)=1$, то

$$f(t)\leqslant(\sin at/at)^p.$$

Это верно для всех таких $f(t)$ и, значит, для их максимума $J_p(t)$. Тем самым завершается доказательство утверждения (1).

Для доказательства (2) вернемся к неравенству (а) и воспользуемся предположением, что $K(\gamma_*, Y_i) \leqslant b^2$:

$$\langle Y_i', Y_i\rangle(r) = \int_0^r (\langle Y_i', Y_i'\rangle - K(\gamma_*, Y_i)\langle Y_i, Y_i\rangle)\,du \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^r (\langle Y_i', Y_i'\rangle - b^2\langle Y_i, Y_i\rangle)\,du \geqslant$$

$$\geqslant \langle h'E_i, hE_i\rangle(r),$$

где hE_i — «якобиево поле» для пространства постоянной кривизны b^2; последняя оценка есть следствие основного неравенства. Следовательно, $h = \sin bu/\sin br$. Повторяем теперь прежнее рассуждение, получая (б) с противоположным неравенством, в котором a заменено на b, и далее до заключения утверждения (2).

Следствие 1. Если выполнено условие (p) и $a^2 > 0$, то первая точка, сопряженная с m на γ, расположена не далее чем на расстоянии π/a вдоль γ.

[Точка $\rho(t)$ является сопряженной с m в том и только в том случае, если некоторый ненулевой p-вектор аннулируется отображением $d\exp_m$.]

Следствие 2. (Теорема Майерса [42]). Если M — полное риманово многообразие, средняя кривизна которого отделена от нуля числом $(d-1)a^2 > 0$, то многообразие M компактно, диаметр его не превосходит π/a, а фундаментальная группа конечна.

Доказательство. Первые два утверждения вытекают из следствия 1. Односвязное риманово накрытие многообразия M обладает теми же локальными свойствами и, значит, должно быть компактным. Но слои накрывающего пространства дискретны, поэтому при компактном накрытии они конечны, и, следовательно, фундаментальная группа конечна.

Следствие 3. Пусть при достаточно малых r через $v(m, r)$ обозначен объем сферы $S(m, r)$, содержащейся в нормальной координатной окрестности. Если $(d-1)a^2$

есть нижняя грань средней кривизны на M и b^2 — верхняя грань кривизны, то $v(m, r)(a/\sin ar)^{d-1}$ — невозрастающая функция от r, а $v(m, r)(b/\sin br)^{d-1}$ — неубывающая функция от r.

Доказательство. Так как теперь мы рассматриваем все геодезические, выходящие из m, то пусть $J(r, x)$, $x=\gamma_*(0)$, заменит прежнее обозначение $J_{d-1}(r)$; $J(r, x)$ является якобианом сужения $\exp_m$ на сферу S_r радиуса r в M_m. Композиция $\exp_m$ с отображением $r \to rx$ определяет отображение S_1 на $S(m, r)$ с якобианом $r^{d-1}J(r, x)$. Таким образом,

$$v(m, r) = \int_{S_1} r^{d-1} J(r, x)\, dx,$$

поэтому требуемый результат следует из монотонности $J(r, x)(ar/\sin ar)^{d-1}$ относительно r и аналогично в случае b.

Замечание. Согласно Гюнтеру [18], то же заключение имеет место, если область значений кривизны есть $[a^2, b^2]$.

Следствие 4. Если M полно и $(d-1)a^2$ есть нижняя грань средней кривизны, то объем шара в нормальных координатах не превосходит объема нормального координатного шара того же диаметра в нормальных координатах на *простой пространственной форме* (т. е. на сфере, евклидовом и гиперболическом пространстве) постоянной кривизны a^2.

Если $a^2>0$, то объем M не превосходит объем сферы радиуса $1/a$, причем равенство достигается, лишь когда M изометрично такой сфере.

Доказательство. Объем шара $B(m, r)$ получается интегрированием якобиана отображения $\exp_m$ по шару радиуса r в M_m. Но указанная грань $(\sin ar/ar)^{d-1}$ является якобианом экспоненциального отображения пространственной формы. (Это вытекает из доказательства теоремы 15, так как при постоянной кривизне на протяжении всего доказательства имеет место равенство.)

Если $a^2>0$, то многообразие M компактно и объем его определяется интегрированием якобиана отображения $\exp_m$ по открытому подмножеству в M_m, расположенному внутри геометрического места минимумов. Интеграл от $(\sin ar/ar)^{d-1}$, верхней грани этого якобиана по объемлющему открытому шару радиуса π/a, мажорирует объем M и равняется в то же время объему сферы радиуса $1/a$.

Если объем M равен объему сферы радиуса $1/a$, то все неравенства в доказательстве теоремы 15(1) должны превратиться в равенства; в частности, якобиевы поля на M принимают тот же вид, что и якобиевы поля в сфере радиуса $1/a$, так что M обладает постоянной кривизной a^2 и локально изометрично сфере радиуса $1/a$. Но геометрическое место минимумов в M_m должно быть сферой S радиуса π/a, а так как $d\exp_m$ аннулирует все векторы, касательные к S, то $\exp_m(S)$ оказывается точкой. Так, вставляя экспоненциальные отображения, получаем глобальную изометрию.

Задача 38. Показать, что сила условия (p) монотонна по p, т. е. (p) влечет $(p+1)$ (с тем же a).

Задача 39. Пусть S — простая пространственная форма кривизны a^2, M — многообразие, удовлетворяющее условию (p) вдоль всех геодезических, выходящих из m, N является либо

(1) p-мерным подмногообразием в M_m, расположенным на сфере с центром O внутри нормального координатного шара, либо

(2) $(p+1)$-мерным подмногообразием нормального координатного шара в M_m.

Пусть φ: $M_m \to S_{m'}$ — линейная изометрия. Показать, что

$$\text{объем } (\exp_m(N)) \leqslant \text{объем}(\exp_{m'} \circ \varphi(N)).$$

[*Указание*: для доказательства свойства (2) требуется обобщение теоремы 15 на произвольные $(p+1)$-векторы. Воспользоваться тем, что если $x=\gamma_*(r)$, то произвольный разложимый $(p+1)$-вектор можно представить в виде $(x+y)y_2 \cdots y_{p+1}$, где все y_i нормальны к x.]