формуле:

$$l''(0)=\int_0^b (\| V'\|^2(u)-K(V)\|V\|^2(u))\,du.$$

Следствие 3. Если в следствии 2 поле V якобиево, то

$$l''(0)=\langle S_{\tau_*(0)}V(0)-V'(0),\ V(0)\rangle -$$
$$-\langle S_{\tau_*(b)}V(b)-V'(b),\ V(b)\rangle.$$

Это получается из уравнения Якоби и интегрирования по частям.

11.2. Индексная форма

Пусть N и P — подмногообразия в M, τ — геодезический сегмент, перпендикулярный к N и P в его концах $\tau(0)$ и $\tau(b)$. Пусть $\mathscr{L}$ — линейное пространство ломаных векторных C^∞-полей вдоль τ, которые перпендикулярны к τ и начальные и конечные векторы которых касательны к N и P. *Индексная форма* геодезической τ — это билинейная форма на $\mathscr{L}$, определенная следующим образом: если $V,\ W\in\mathscr{L}$, то

$$I(V,\ W)=\int_0^b (\langle V',\ W'\rangle(u)-\langle R_{\tau_* V}\tau_*,\ W\rangle(u))du+$$
$$+\langle S_{\tau_*(0)}V(0),\ W(0)\rangle-\langle S_{\tau_*(b)}V(b),\ W(b)\rangle.$$

Грубо говоря, если рассматривать функцию длины, определенную на множестве кривых от N до P, то следствие 3 леммы 1 показывает, что критические точки этой функции являются геодезическими, такими, как τ. Индексную форму можно рассматривать как естественное обобщение гессиана функции в критической точке, поскольку она является симметрической билинейной формой, ассоциированной с квадратичной формой $l''(0)$ поля V из следствия 2 леммы 2. В теории Морса исследуется это обобщение.

Если заметить, что вне точек недифференцируемости V $(u_0=0,\ \ldots,\ u_n=b)$

$$\langle V',\ W'\rangle=\langle V',\ W\rangle'-\langle V'',\ W\rangle,$$

то получится другая формула для $I(V, W)$:

$$I(V, W)=\sum_{i=1}^{n-1}\langle V'(u_i^-)-V'(u_i^+), W(u_i)\rangle -$$
$$-\int_0^b \langle V''+R_{\tau_* V}\tau_*, W\rangle(u)\,du+$$
$$+\langle S_{\tau_*(0)}V(0)-V'(0), W(0)\rangle-\langle S_{\tau_*(b)}V(b)-V'(b), W(b)\rangle.$$

Из этой формулы с помощью техники, использованной в доказательстве следствия 3 леммы 1, легко определить нулевое пространство формы I, т. е. условия на V, при которых $I(V, W)=0$ для всех $W\in\mathscr{L}$.

Выделим вытекающие отсюда свойства концов.

Определение. Якобиево поле V является *N-якобиевым полем*, если

(I) V перпендикулярно к геодезической τ;

(II) $V(0)\in N_{\tau(0)}$;

(III) $S_{\tau_*(0)}V(0)-V'(0)$ перпендикулярно к $N_{\tau(0)}$.

Если N — одна точка, $N=\tau(0)$, то (I), (II) и (III) сводятся к следующим соотношениям: $V(0)=0$, $V'(0)$ перпендикулярно к $\tau_*(0)$.

Задача 4. Показать, что N-якобиевы поля образуют линейное пространство размерности $d-1$, где $d=\dim M$.

Теорема 1. Нулевое пространство индексной формы I состоит из пересечения пространств N-якобиевых и P-якобиевых полей.

Мы уже видели, что якобиево поле характеризуется тем, что оно ассоциировано с прямоугольником, продольные которого геодезические. Следующая теорема дает аналогичную характеристику N-якобиевых полей.

Теорема 2. Поле V является N-якобиевым полем в том и только в том случае, если V ассоциировано с некоторым прямоугольником Q, продольные которого являются геодезическими, выходящими из N перпендикулярно к нему и параметризованными длиной дуги.

Доказательство. В силу задачи 4, достаточно показать, что якобиевы поля, ассоциированные с такими прямоугольниками, являются N-якобиевыми полями, значения которых заполняют нормальное пространство к $\tau_*(\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon>0$.

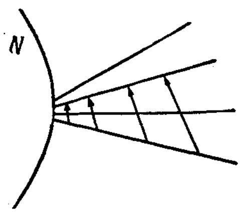

Рис. 37.

Рассматриваемые прямоугольники можно пропустить через $\perp(N)$ с помощью экспоненциального отображения $\perp(N)\to M$. В действительности векторное поле $X=dQ(D_1)$, продольное к такому прямоугольнику Q, дает кривую γ, $\gamma(v)=X(0, v)$ в $\perp_1(N)$, единичном нормальном расслоении, и Q можно представить в виде $Q(u, v)=\exp u\gamma(v)$.

Так как $V(0)=dQ(D_2(0, 0))$ — касательная к проекции γ в N, то условие (II) имеет место.

$$
\begin{aligned}
S_{\tau_*(0)}V(0)-V'(0) &= T_{V(0)}X(0)-D_{X(0)}V=\\
&= D_{V(0)}X-E_{V(0)}X-D_{X(0)}V=\\
&= \bar{Q}(0, 0)\,(D_2\omega^Q(D_1)+\varphi^Q(D_2)\,\omega^Q(D_1)-\\
&\quad -D_1\omega^Q(D_2)-\varphi^Q(D_1)\,\omega^Q(D_2))\,(0, 0)-\\
&\quad -E_{V(0)}X=\\
&= -E_{V(0)}X,
\end{aligned}
$$

в силу первого структурного уравнения (1). Но E — ковариантная производная на N и нормальном расслоении, так что производная нормального поля $X(0,\cdot)$ снова является нормальным вектором, что доказывает (III). Наконец, для доказательства (I) нужно лишь показать, что V и V' перпендикулярны к τ_* в одной точке; это уже установлено для $V(0)$ и, следовательно, для $S_{\tau_*(0)}V(0)$. Таким образом, остается проверить, что $E_{V(0)}X$ перпендикулярно к $\tau_*(0)=X(0)$. Но

$$D_2\langle X, X\rangle(0, 0)=2\langle E_{V(0)}X, X(0)\rangle=0,$$

так как $\langle X, X\rangle=1$.

Мы знаем, что отображение $\exp: \perp(N)\to M$ невырождено на нулевом сечении и, значит, в точке $x=\varepsilon\tau_*(0)$ при некотором $\varepsilon>0$. Но касательные в точке x к прямоугольникам в $\perp(N)$ вида $(u, v)\to u\gamma(v)$, где γ — то же, что и выше, заполняют касательное пространство $\perp(N)_x$. Следовательно, касательные в точке $\tau(\varepsilon)$ к прямоугольникам Q заполняют касательное пространство $M_{\tau(\varepsilon)}$, а их нормальные составляющие $V(\varepsilon)$ заполняют пространство, ортогональное к $\tau_*(\varepsilon)$.

Следствие. Образ отображения $d\exp_x$: $\perp(N)_x\to M_p$, где $p=\exp x=\tau(u)$, является пространством, порожденным $\tau_*(u)$ и значениями N-якобиевых полей в точке $u\neq 0$.

Доказательство. Всякий вектор, касательный в x, можно разложить на вектор, касательный к $\perp_u(N)$, и вектор, касательный к лучу, проходящему через x. При отображении $d\exp$ составляющая, касательная к $\perp_u(N)$, переходит в соответствующее значение N-якобиева поля, а составляющая вдоль луча — в вектор, кратный $\tau_*(u)$. ($\perp_u(N)=\{y\in\perp(N)\mid \|y\|=u\}$.)

Квадратичную форму, ассоциированную с I, мы будем снова обозначать через I, так что $I(V)=I(V, V)$. Так как $I(V)$ при $V\in\mathscr{S}$ совпадает с второй вариацией $l''(0)$ прямоугольника, отнесенного к V, то сразу же получается

Теорема 3. Если $V\in\mathscr{S}$ таково, что $I(V)<0$, то каждая окрестность кривой τ содержит более короткие кривые, соединяющие окрестность $\tau(0)$ в N с окрестностью $\tau(b)$ в P.

Вообще размерность максимального подпространства в $\mathscr{L}$, на котором I отрицательно определено, так называемый *индекс формы* I, показывает, сколько имеется независимых направлений, по которым можно сдвинуть τ в более короткую кривую, соединяющую N с P. Ниже показано, что индекс конечен.

Задача 5. Пусть $M=R^d$ с евклидовой метрикой; предположим, что подмногообразия N и P не пересекаются. Пусть $K(N, P)$ — пространство ломаных C^∞-кривых, соединяющих N с P, а $H(N, P)$ — пространство прямых линий, соединяющих N с P. Предположим, что эти кривые параметризованы *приведенной длиной дуги*, т. е. все они определены на отрезке $[0, 1]$ и имеют касательные постоянной длины. Превратим $K(N, P)$ в метрическое пространство, определив расстояние между кривыми σ, τ так:

$$\rho(\sigma, \tau)=\max \rho(\sigma(u), \tau(u)) + \left| |\sigma| - |\tau| \right|.$$

Пусть φ: $K(N, P)\to H(N, P)$ — отображение, относящее кривой σ линейный сегмент, соединяющий ее концы. Показать следующее:

(а) Отображение φ гомотопно тождественному отображению посредством гомотопии, оставляющей неподвижным $H(N, P)$. Таким образом, $H(N, P)$ — деформационный ретракт пространства $K(N,P)$; оба пространства имеют одинаковые топологические инварианты.

(б) $H(N, P)$ топологически совпадает с $N\times P$; функция длины L дифференцируема как функция на $N\times P$.

(в) Векторные поля V, ассоциированные с прямоугольниками, образы которых принадлежат $H(N, P)$, являются якобиевыми полями в R^d и могут быть отождествлены с касательными к $N\times P$.

(г) Критическими точками L как дифференцируемой функции на $N\times P$ являются линейные сегменты, перпендикулярные к N и P.

(д) Гессиан L является по существу индексной формой, суженной на подпространство якобиевых полей в $\mathscr{L}$.