11.3. Фокальные и сопряженные точки [39, 40, 41, 49, 61, 84]

Пусть N — подмногообразие в M и $\perp(N)$ — нормальное расслоение. Сужение экспоненциального отображения M дает отображение $\exp\colon \perp(N)\to M$, которое, как мы уже видели, является диффеоморфизмом в окрестности нулевого сечения. Пусть $\perp(N)(n)$ — слой расслоения $\perp(N)$ над $n\in N$. Тогда $t\in\perp(N)(n)$ является *фокальной точкой* подмногообразия N, если $d\exp$ вырождено в точке t. Если ρ — луч, соединяющий 0 с t в пространстве $\perp(N)(n)$, то $\exp(t)$ называется *фокальной*

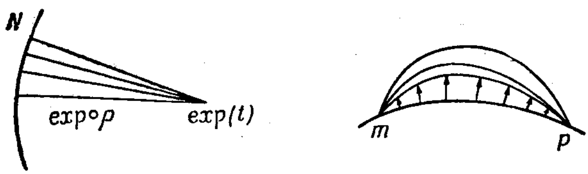

Рис. 38.

точкой N вдоль кривой $\exp\circ\rho$, которая, конечно, является геодезической, перпендикулярной к N. Когда N состоит из одной точки, скажем m, так что $\perp(N)=M_m$, то фокальная точка называется *сопряженной с m*. *Порядком* фокальной точки называется размерность линейного пространства, аннулируемого отображением $d\exp$.

Теорема 2 и ее следствие показывают, что фокальные точки можно определить эквивалентным образом в терминах якобиевых полей следующим образом. Если τ — геодезическая, выходящая перпендикулярно из N, то $\tau(b)$ является фокальной точкой N вдоль τ в том и только в том случае, если существует N-якобиево поле, исчезающее в точке b. Порядок $\tau(b)$ совпадает с размерностью пространства таких якобиевых полей. В силу теоремы 1, порядок совпадает также с размерностью нулевого пространства индексной формы геодезической τ, соединяющей концевое многообразие N с точкой $\tau(b)$.

Последнее утверждение подсказывает, как можно было бы обобщить понятие фокальной точки на «фокальное подмногообразие». Вероятно, тогда надо было бы доказать для случая двух концевых многообразий «теорему об индексе», которую мы выведем ниже в случае одного концевого многообразия и концевой точки. Целью такой теоремы является выражение индекса индексной формы в терминах порядков фокальных точек (или фокальных подмногообразий), расположенных между концевыми многообразиями. Для случая двух концевых многообразий такие теоремы были сформулированы Морсом [49] и Амброзом [1], однако их формулировка и доказательство гораздо труднее, чем в рассматриваемом нами случае, в котором формулировка Морса, очевидно, является окончательной.

Задача 6. Показать, что сопряженность — симметричное отношение, т. е. если m сопряжено с n вдоль геодезической τ, то n сопряжено с m вдоль $-\tau$, где $-\tau$ есть геодезическая с начальной касательной $-\tau_*(0)$.

Задача 7. Показать, что если τ — геодезический сегмент, перпендикулярный к N, на котором нет фокальных точек подмногообразия N, то существуют такие окрестность U сегмента τ в M и окрестность V точки $\tau(0)$ в N, что τ минимизирует расстояние среди кривых в U, соединяющих точки из V с $\tau(b)$ (см. теорему 8.2).

Задача 8. Показать, что если M — полное многообразие, некоторая точка которого не имеет сопряженных точек, то M накрывается пространством R^d.

Задача 9. Показать, что сопряженные точки отсутствуют, если кривизна M неположительна.

Задача 10. Определить сопряженные точки и их порядки для точек d-сферы постоянной кривизны.

Задача 11. Пусть $CP^d = S^{2d+1}/S^1$ наделено метрикой, индуцированной метрикой на сфере S^{2d+1}, имеющей кривизну 1. Показать, что точки, сопряженные с некоторой точкой в CP^d, расположены на расстояниях $(2n+1)\pi/2$ и $n\pi$ (n — целое число) с порядками 1 и $2d-1$ соответственно. Воспользоваться тем, что якобиево поле, отнесенное семейству горизонтальных геодезических в S^{2d+1}, должно проектироваться в якобиево поле на CP^d.

Задача 12. Таким же образом показать, что точки, сопряженные с некоторой точкой в $QP^d = S^{4d+3}/S^3$, где S^{4d+3} — единичная сфера, расположены на расстояниях $(2n+1)\pi/2$ и $n\pi$ с порядками 3 и $4d-1$ соответственно.

11.4. Инфинитезимальные деформации

Полезным приемом для изучения индексной формы служит разложение ее в сумму нескольких индексных форм, получаемых добавлением промежуточных $(d-1)$-мерных многообразий, ортогональных к τ. Мы будем иметь дело с несколькими индексными формами, относящимися, однако, к сегментам одной и той же геодезической τ, и потому введем обозначение $I(T_1, T_2)$ для индексной формы с концевыми многообразиями T_1 и T_2. Символ сужения также будет опускаться, т. е. если V принадлежит $\mathscr{L}$, области определения $I(N, P)$, подмногообразия T_1 и T_2 ортогональны к τ в точках $\tau(u_1)$, $\tau(u_2)$ и $I_1 = I(T_1, T_2)$, то $I_1(V)$ будет обозначать $I_1(V|_{[u_1, u_2]})$.

Если промежуточные многообразия выбрать достаточно близко друг к другу, то всякую кривую в некоторой окрестности τ [под *окрестностью* τ понимается совокупность кривых, соединяющих некоторую окрестность $\tau(0)$ в N с некоторой окрестностью $\tau(b)$ в P, расположенных притом в некотором открытом множестве, содержащем τ] можно заменить единственной более короткой ломаной геодезической, с изломами только на промежуточных многообразиях. Если подмногообразие T_i проходит через $\tau(u_i)$, $i=1, \ldots, n$, $u_i < u_{i+1}$, то для этого требуется, чтобы на $\tau|_{[0, u_1]}$ не было фокальных точек N, на $\tau|_{[u_i, u_{i+1}]}$ — точек, сопряженных с $\tau(u_i)$, $i=1, \ldots, n-1$, на $\tau|_{[u_n, b]}$ — фокальных точек P. Кривая σ, достаточно близкая к τ, будет пересекать каждое T_i, и пусть p_i — первое пересечение. Если σ достаточно близко к τ, то существуют единственный кратчайший геодезический сегмент, соединяющий p_1 с окрестностью точки $\tau(0)$ в N, единственный кратчайший геодезический сегмент,