дезических в S^{2d+1}, должно проектироваться в якобиево поле на CP^d.

Задача 12. Таким же образом показать, что точки, сопряженные с некоторой точкой в $QP^d = S^{4d+3}/S^3$, где S^{4d+3} — единичная сфера, расположены на расстояниях $(2n+1)\pi/2$ и $n\pi$ с порядками 3 и $4d-1$ соответственно.

11.4. Инфинитезимальные деформации

Полезным приемом для изучения индексной формы служит разложение ее в сумму нескольких индексных форм, получаемых добавлением промежуточных $(d-1)$-мерных многообразий, ортогональных к τ. Мы будем иметь дело с несколькими индексными формами, относящимися, однако, к сегментам одной и той же геодезической τ, и потому введем обозначение $I(T_1, T_2)$ для индексной формы с концевыми многообразиями T_1 и T_2. Символ сужения также будет опускаться, т. е. если V принадлежит $\mathscr{L}$, области определения $I(N, P)$, подмногообразия T_1 и T_2 ортогональны к τ в точках $\tau(u_1)$, $\tau(u_2)$ и $I_1 = I(T_1, T_2)$, то $I_1(V)$ будет обозначать $I_1(V|_{[u_1, u_2]})$.

Если промежуточные многообразия выбрать достаточно близко друг к другу, то всякую кривую в некоторой окрестности τ [под *окрестностью* τ понимается совокупность кривых, соединяющих некоторую окрестность $\tau(0)$ в N с некоторой окрестностью $\tau(b)$ в P, расположенных притом в некотором открытом множестве, содержащем τ] можно заменить единственной более короткой ломаной геодезической, с изломами только на промежуточных многообразиях. Если подмногообразие T_i проходит через $\tau(u_i)$, $i=1, \ldots, n$, $u_i < u_{i+1}$, то для этого требуется, чтобы на $\tau|_{[0, u_1]}$ не было фокальных точек N, на $\tau|_{[u_i, u_{i+1}]}$ — точек, сопряженных с $\tau(u_i)$, $i=1, \ldots, n-1$, на $\tau|_{[u_n, b]}$ — фокальных точек P. Кривая σ, достаточно близкая к τ, будет пересекать каждое T_i, и пусть p_i — первое пересечение. Если σ достаточно близко к τ, то существуют единственный кратчайший геодезический сегмент, соединяющий p_1 с окрестностью точки $\tau(0)$ в N, единственный кратчайший геодезический сегмент, соединяющий p_i с p_{i+1}, и единственный кратчайший геодезический сегмент, соединяющий p_n с выбранной окрестностью $\tau(b)$ в P. Цепочка этих геодезических сегментов дает ломаную геодезическую γ, имеющую изломы только на промежуточных многообразиях T_i. Отображение φ: $\sigma \to \gamma$ является неувеличивающей длину деформа-

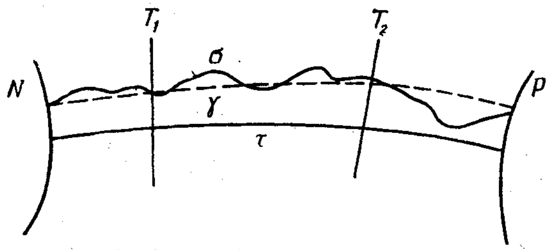

Рис. 39.

цией множества кривых, расположенных вблизи τ, в гораздо меньшую совокупность ломаных геодезических. В действительности образ φ можно рассматривать как произведение многообразий $T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n = T$, а функцию длины на пространстве кривых — как некоторую дифференцируемую функцию на T. Геодезическая τ оказывается критической точкой функции длины, а индексная форма τ — ее гессианом.

Детальные доказательства этих фактов более соответствуют теории Морса, поэтому мы здесь займемся их инфинитезимальными вариантами.

Лемма 3. При условиях, наложенных на выбор u_i, каковы бы ни были $y_i \in \tau_*(u_i)^{\perp}$, существует единственное векторное поле $Y \in \mathscr{L}$, такое, что $Y(u_i) = y_i$, $Y|_{[u_i, u_{i+1}]}$ — якобиево поле и $Y|_{[0, u_1]}$, $Y|_{[u_n, b]}$ являются N-якобиевым и P-якобиевым полями соответственно.

Отображение G: $\sum_{i=1}^{n} \tau_*(u_i)^{\perp} \to \mathscr{L}$, $G(y_1, \ldots, y_n) = Y$ является линейным изоморфизмом.

Доказательство. Линейное преобразование, относящее N-якобиеву полю V его значение $V(u_1)$, осуществляет взаимно однозначное отображение на $\tau_*(u_1)^{\perp}$, поскольку $\tau(u_1)$ не является фокальной точкой N. Таким образом, $Y|_{[0,\,u_1]}$ существует и единственно; то же верно для $Y|_{[u_n,\,b]}$.

По тем же причинам существует единственное $\tau(u_i)$-якобиево поле V_i и единственное $\tau(u_{i+1})$-якобиево поле W_i, такие, что $V_i(u_{i+1})=y_{i+1}$, $W_i(u_i)=y_i$. Тогда V_i+W_i — якобиево поле, принимающее значения y_i в u_i и y_{i+1} в u_{i+1}, откуда следует существование $Y|_{[u_i,\,u_{i+1}]}$. Более того, если Y задано, то $Y|_{[u_i,\,u_{i+1}]}-W_i=$ $=V_i|_{[u_i,\,u_{i+1}]}$, в силу единственности V_i, что доказывает единственность $Y|_{[u_i,\,u_{i+1}]}$.

Свойства линейности и взаимной однозначности отображения G сразу же вытекают из единственности Y и линейности уравнения Якоби.

Обозначим образ G через $\mathscr{K}$. Тогда $\dim\mathscr{K}=(d-1)n$. Вычисляя $V\in\mathscr{L}$ в точках $u_1,\ \ldots,\ u_n$, получим линейное преобразование $E\colon\ \mathscr{L}\to\sum\tau_*(u_i)^{\perp}$, $E(V)=(V(u_1),\ \ldots$ $\ldots,\ V(u_n))$. Композиция $F=G\circ E\colon\ \mathscr{L}\to\mathscr{K}$ является инфинитезимальным аналогом деформации $\varphi:\sigma\to\gamma$, и потому мы будем говорить, что F — *инфинитезимальная деформация*. Свойству $\varphi:\sigma\to\gamma$ не увеличивать длину соответствует тот факт (он доказан ниже), что F не увеличивает индексную форму I.

Задача 13. Пусть Q — ломаный C^∞-прямоугольник с трансверсальными кривыми τ^{u_i}, расположенными в T_i; тогда при действии φ на продольные кривые из Q получается другой прямоугольник $\varphi(Q)$. Показать, что если V — векторное поле, ассоциированное с Q, то $F(V)$ — поле, ассоциированное с $\varphi(Q)$.

Лемма 4. Если Y и Z — якобиевы поля, то разность $\langle Y, Z'\rangle-\langle Y', Z\rangle$ постоянна. Если Y и Z являются N-якобиевыми полями, то эта константа равна нулю.

Доказательство. В самом деле,

$$(\langle Y, Z'\rangle-\langle Y'Z\rangle)'=\langle Y, Z''\rangle-\langle Y'', Z\rangle=$$
$$=-\langle Y,\ R_{\tau_*Z}\tau_*\rangle+\langle R_{\tau_*Y}\tau_*,\ Z\rangle=$$
$$=0,\ \text{в силу тождества кривизны.}$$

Если Y и Z являются N-якобиевыми полями, то

(а) $\langle S_{\tau_*(0)} Y(0) - Y'(0),\ Z(0)\rangle = 0,$

(б) $\langle S_{\tau_*(0)} Z(0) - Z'(0),\ Y(0)\rangle = 0.$

Вычитая (б) из (а) и используя симметричность $S_{\tau_*(0)}$, получаем

$$-\langle Y'(0),\ Z(0)\rangle + \langle Z'(0),\ Y(0)\rangle = 0.$$

Задача 14. Пусть $\mathscr{J}$ — такое $(d-1)$-мерное подпространство якобиевых полей вдоль τ, что для любых $Y, Z \in \mathscr{J}$

$$\langle Y,\ Z'\rangle - \langle Y',\ Z\rangle = 0.$$

Показать, что существует такое подмногообразие N, ортогональное к τ в точке $\tau(0)$, что $\mathscr{J}$ оказывается пространством N-якобиевых полей.

Теорема 4. *Основное неравенство.* Предположим, что на $\tau((0,\ b])$ нет фокальных точек N. Для всякого $V \in \mathscr{L}$, по лемме 3, найдется такое единственное N-якобиево поле Y, что $Y(b) = V(b)$. Тогда $I(V) \geqslant I(Y)$, причем равенство достигается только в том случае, если $V = Y$.

Доказательство. Пусть $Y_1, \ldots, Y_{d-1}$ — базис пространства N-якобиевых полей. Тогда на $(0, b]$ имеется единственное представление $V = \sum_{i=1}^{d-1} f_i Y_i$, где f_i — непрерывные ломаные C^∞-функции. Мы предоставляем в качестве упражнения проверку существования, а также единственности такого представления на $[0,\ b]$ (см. задачу 15).

В точках, где V' существует, положим $W = \sum_i f_i' Y_i$ и $Z = \sum_i f_i Y_i'$, так что $V' = W + Z$. Тогда

$$\text{(а) } \Big\langle V,\ \sum_j f_j' Y_j' \Big\rangle = \sum_{i,\,j} f_i f_j' \langle Y_i,\ Y_j'\rangle =$$

$$= \sum_{i,\,j} f_i f_j' \langle Y_i',\ Y_j\rangle \text{ (по лемме 4)} = \langle W,\ Z\rangle.$$

(б) $\langle V, Z\rangle' = \langle V', Z\rangle + \langle V, Z'\rangle =$

$= \langle W, Z\rangle + \langle Z, Z\rangle + \left\langle V, \sum_i f_i' Y_i'\right\rangle + \left\langle V, \sum_i f_i Y_i''\right\rangle =$

$= \langle W, Z\rangle + \langle Z, Z\rangle + \langle W, Z\rangle - \left\langle V, \sum_i f_i R_{\tau_* Y_i}\tau_*\right\rangle =$

$= 2\langle W, Z\rangle + \langle Z, Z\rangle - \langle V, R_{\tau_* V}\tau_*\rangle.$

Таким образом, подинтегральное выражение в $I(V)$ принимает вид

(в) $\langle V', V'\rangle - \langle R_{\tau_* V}\tau_*, V\rangle =$

$= \langle W + Z, W + Z\rangle - \langle R_{\tau_* V}\tau_*, V\rangle =$

$= \langle W, W\rangle + \langle V, Z\rangle'$ [в силу (б)].

(г) $I(V) = \langle S_{\tau_*(0)} V(0), V(0)\rangle - \langle S_{\tau_*(b)} V(b), V(b)\rangle +$

$+ \int_0^b (\langle W, W\rangle + \langle V, Z\rangle')\, du =$

$= \langle S_{\tau_*(0)} V(0), V(0)\rangle - \langle S_{\tau_*(b)} V(b), V(b)\rangle +$

$+ \langle V(b), Z(b)\rangle - \langle V(0), Z(0)\rangle + \int_0^b \langle W, W\rangle\, du.$

Но

$$S_{\tau_*(0)} V(0) - Z(0) = \sum_i f_i(0)\left(S_{\tau_*(0)} Y_i(0) - Y_i'(0)\right) \perp V(0),$$

откуда

(д) $I(V) = \langle Z(b) - S_{\tau_*(b)} V(b), V(b)\rangle + \int_0^b \langle W, W\rangle\, du.$

Совпадающее с V в точке b N-якобиево поле есть $Y = \sum_i c_i Y_i$, где $c_i = f_i(b)$. При $W_1 = \sum_i c_i' Y_i = 0$, $Z_1 = \sum_i c_i Y_i'$ те же вычисления (а) — (д) дают

(е) $I(Y) = \langle Z(b) - S_{\tau_*(b)} V(b), V(b)\rangle,$

ибо $Z_1(b)=Z(b)$, $Y(b)=V(b)$. Отсюда $I(V)-I(Y)=$ $=\int_0^b \langle W, W\rangle du \geqslant 0$. Равенство достигается в том и только в том случае, если $W=0$, что в свою очередь эквивалентно равенству $f_i'=0$ при всех i, т. е. тому, что f_i постоянно при всех i и, наконец, равенству $Y=V$.

Далее, в следствиях 1 и 2 предположения относительно N и $\tau((0, b])$ остаются прежними; это не относится к следствию 3.

Следствие 1. Если $V(b)=0$, то $I(V)\geqslant 0$ и равенство достигается в том и только в том случае, если $V=0$.

Следствие 2. Пусть $Y\in\mathscr{L}$. Тогда Y является N-якобиевым полем в том и только в том случае, если $I(V, Y)=0$ для всех таких $V\in\mathscr{L}$, что $V(b)=0$.

Доказательство. С помощью поляризации равенства (д) получаем для $V_1, V_2\in\mathscr{L}$, $V_1'=Z_1+W_1$, $V_2'=Z_2+W_2$ и т. д., что

$$I(V_1, V_2)=\langle Z_1(b)-S_{\tau_*(b)}V_1(b), V_2(b)\rangle+\int_0^b \langle W_1, W_2\rangle du.$$

Если Y есть N-якобиево поле и $V(b)=0$, то, полагая $V_1=Y$, $V_2=V$, получаем $W_1=0$, $V_2(b)=0$, откуда $I(V_1, V_2)=I(Y, V)=0$.

Обратно, пусть $I(V, Y)=0$ для всех $V\in\mathscr{L}$, таких, что $V(b)=0$. Пусть Y_1 есть N-якобиево поле, такое, что $Y(b)=Y_1(b)$. Тогда $I(Y, Y-Y_1)=0$ по предположению; $I(-Y_1, Y-Y_1)=0$, как только что доказано; следовательно,

$$I(Y-Y_1)=I(Y, Y-Y_1)+I(-Y_1, Y-Y_1)=0.$$

Отсюда, в силу следствия 1, $Y-Y_1=0$.

Следствие 3. Предположим, что на $\tau((0, b])$ нет точек, сопряженных с $\tau(0)$. Для $V\in\mathscr{L}$, в силу леммы 3, существует единственное якобиево поле Y, такое, что $Y(0)=V(0)$, $Y(b)=V(b)$. Тогда $I(V)\geqslant I(Y)$, причем равенство достигается в том и только в том случае, если $V=Y$.

Доказательство. Пусть T_1 и T_2 являются $(d-1)$-мерными трансверсальными многообразиями в $\tau(0)$ и $\tau(b)$ соответственно, вторые фундаментальные формы которых равны 0. Пусть $I_1=I(T_1, T_2)$ — ассоциированная индексная форма. Тогда для $V_1, V_2 \in \mathscr{L}$ имеем

$$I_1(V_1, V_2)-I(V_1, V_2)= \\ =-\langle S_{\tau_*(0)}V_1(0), V_2(0)\rangle+\langle S_{\tau_*(b)}V_1(b), V_2(b)\rangle$$

и, следовательно, $I_1(V)-I(V)=I_1(Y)-I(Y)$, так что достаточно проверить неравенство для I_1 вместо I.

Пусть $I_2=I(\tau(0), T_2)$, $I_3=I(T_1, \tau(b))$; тогда I_1, I_2 и I_3 совпадают с точностью до их областей определения.

В силу леммы 3, имеем $Y=Y_1+Y_2$, где Y_1 есть $\tau(0)$-якобиево поле, такое, что $Y_2(0)=V(0)$. Так как $V-Y$ обращается в нуль в концах $\tau(0)$ и $\tau(b)$, то $I_1(V-Y, Y_1)=I_2(V-Y, Y_1)=0$ и $I_1(V-Y, Y_2)=$ $=I_3(V-Y, Y_2)=0$, в силу следствия 2, примененного к I_2 и I_3 соответственно. Складывая эти равенства, получаем

$$I_1(V-Y, Y_1+Y_2)=I_1(V-Y, Y)=0,$$

$$\text{т. е. } I_1(V, Y)=I_1(Y, Y).$$

Но в силу следствия 1,

$$0\leqslant I_2(V-Y, V-Y)=I_1(V, V)-2I_1(V, Y)+I_1(Y, Y)= \\ =I_1(V, V)-I_1(Y, Y),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $V-Y=0$.

Задача 15. Пусть $V_1, \ldots, V_d$ являются векторными C^∞-полями вдоль τ, независимыми всюду, кроме точки $\tau(0)$. Пусть V — ломаное векторное C^∞-поле вдоль τ, причем $V=\sum f_i V_i$ на $(0, b]$. Показать на примере, что f_i не обязательно имеют непрерывные продолжения на $[0, b]$, даже если $V(0)=\sum a_i V_i(0)$. Однако если эти V_i — якобиевы поля, то существуют единственные непрерывные продолжения коэффициентов f_i.

Теорема 5. Инфинитезимальная деформация F не увеличивает I, т. е. $I(V) \geqslant I(F(V))$. При этом равенство достигается лишь в том случае, если $V = F(V)$.

Задача 16. Доказать теорему 5 с помощью теоремы 4 и следствия 3.

Следствие 1. (В случае, когда N — точка, это утверждение принадлежит Якоби.) За первой фокальной точкой геодезическая τ не минимизирует расстояние до N.

Доказательство. Пусть $\tau(c)$ — фокальная точка N, $c \in (0, b)$; пусть Y — ненулевое N-якобиево поле, исчезающее в c. Пусть $V \in \mathscr{L}$ определяется равенствами $V|_{[0,c]} = Y|_{[0,c]}$, $V|_{[c,b]} = 0$. Пусть $I = I(N, \tau(b))$, $I_1 = I(N, \tau(c))$, $I_2 = I(\tau(c), \tau(b))$. Тогда $I(V) = I_1(V) + I_2(V) = I_1(Y) + I_2(0) = 0$, в силу следствия 2 теоремы 4.

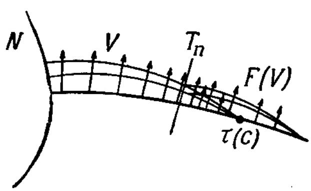

Рис. 40.

Теперь промежуточные многообразия для инфинитезимальной деформации F выберем так, чтобы точка c отличалась от всех u_i. Тогда в точке c поле $F(V)$ гладко, а поле V имеет излом, откуда $F(V) \neq V$ и $I(F(V)) < I(V) = 0$. По теореме 3, существуют более короткие кривые, соединяющие $\tau(b)$ с N.

Следствие 2. Точка $\tau(c)$ является первой фокальной точкой многообразия N вдоль τ, если $\tau([0, b])$ не минимизирует длину дуги до N при $b > c$, но минимизирует ее при $b < c$.

Увеличенный индекс квадратичной формы — это размерность максимального подпространства, на котором эта форма отрицательно полуопределена,

Следствие 3. Индекс и увеличенный индекс формы I совпадают с индексом и увеличенным индексом формы $I|_{\mathscr{K}}$ и потому конечны.

Доказательство. Так как очевидно, что индекс формы I не меньше индекса $I|_{\mathscr{K}}$, то достаточно доказать обратное неравенство и сделать то же самое для увеличенного индекса.

Пусть $\mathscr{H}$ — подпространство в $\mathscr{L}$, на котором форма I отрицательно полуопределена. Тогда $F|_{\mathscr{H}}$ является изоморфизмом, поскольку если $V \in \mathscr{H}$ принадлежит ядру F, т. е. $F(V)=0$, то $I(F(V))=0 \leqslant I(V)=0$, откуда ввиду того что достигается равенство, имеем $V=F(V)=0$. Так как I отрицательно полуопределена на $F(\mathscr{H})$, то тем самым доказано требуемое совпадение увеличенных индексов. Для самого индекса доказательство аналогично с точностью до замены термина «полуопределенный» на термин «определенный».

Пусть теперь фокальные точки N вдоль τ располагаются на расстояниях c_i, $c_i \leqslant c_{i+1} < b$, $i=1, \ldots, h_-$, причем каждое c_i повторяется столько раз, какова кратность фокальной точки $\tau(c_i)$; не исключено, что множество $\{c_i\}$ не исчерпывает всех *фокальных значений* в $(0, b)$, и заранее неизвестно, что оно конечно. Итак, рассматриваются такие поля $Y_i \in \mathscr{L}$, $i=1, \ldots, h_-$, что $Y_i|[0, c_i]$ являются N-якобиевыми полями, $Y_i|_{[c_i, b]}=0$ и при любом $c \in (0, b)$ поля $\{Y_i|c=c_i\}$ независимы. Пусть $\mathscr{H}_-$ есть линейное пространство, порожденное этими Y_i, $\mathscr{H}=\mathscr{H}_- + \mathscr{H}_0$, где $\mathscr{H}_0$ — нулевое пространство формы I.

Задача 17. Доказать, что Y_i независимы, так что $\dim \mathscr{H}_- = h_-$. Более того, сумма $\mathscr{H}_- + \mathscr{H}_0$ является прямой.

Лемма 5. Сужение I на $\mathscr{H}$ тождественно равно нулю.

Доказательство. Так как $I(\mathscr{H}, \mathscr{H}_0)=0$, то достаточно показать, что $I(\mathscr{H}_-, \mathscr{H}_-)=0$, т. е. что $I(Y_i, Y_j)=0$ при всех i, j. Можно считать, что $c_i \leqslant c_j$.

Пусть $I_1 = I(N, \tau(c_j))$, $I_2 = I(\tau(c_j), P)$. Тогда

$$I(Y_i, Y_j) = I_1(Y_i, Y_j) + I_2(Y_i, Y_j) = I_1(Y_i, Y_j) = 0,$$

так как, в силу теоремы 1, Y_j принадлежит нулевому пространству формы I_1.

Пусть $a(I)$, $i(I)$, $n(I)$ — соответственно увеличенный индекс, индекс и размерность нулевого пространства формы I. Хорошо известно, что на конечномерном пространстве сумма индекса и размерности нулевого пространства совпадают с увеличенным индексом. Поскольку форму I можно сузить на конечномерное пространство $\mathscr{H}$ без изменения индекса и увеличенного индекса, то упомянутый результат также верен и для I, так что $a(I) = i(I) + n(I)$.

В дальнейшем, говоря о *числе* фокальных точек, мы будем иметь в виду сумму их порядков.

Теорема 6. Число фокальных точек многообразия N на $\tau((0, b))$ конечно и не превосходит $i(I)$.

Доказательство. Ввиду задачи 17, леммы 5 и конечности $a(I)$ имеем $h_- + n(I) = \dim \mathscr{H} \leqslant a(I) = i(I) + n(I)$ и потому $h_- \leqslant i(I)$.

11.5. Теорема Морса об индексе [22, 49]

В этом параграфе мы ограничимся случаем $P = \tau(b)$. Теорема Морса об индексе утверждает, что неравенство теоремы 6 является в этом случае равенством.

Теорема 7. Пусть $I = I(N, \tau(b))$. Тогда $a(I)$ совпадает с числом фокальных точек многообразия N на $\tau((0, b])$.

Доказательство основано на изучении поведения формы $I_t = I(N, \tau(t))$, а также целочисленных функций $a(t) = a(I_t)$, $i(t) = i(I_t)$ и $n(t) = n(I)_t$, когда t меняется от 0 до b.

Поскольку при этом область определения I_t можно рассматривать как возрастающую функцию от t, то функции a и i не убывают. При малых t форма I_t поло-