Пусть $I_1 = I(N, \tau(c_j))$, $I_2 = I(\tau(c_j), P)$. Тогда

$$I(Y_i, Y_j) = I_1(Y_i, Y_j) + I_2(Y_i, Y_j) = I_1(Y_i, Y_j) = 0,$$

так как, в силу теоремы 1, Y_j принадлежит нулевому пространству формы I_1.

Пусть $a(I)$, $i(I)$, $n(I)$ — соответственно увеличенный индекс, индекс и размерность нулевого пространства формы I. Хорошо известно, что на конечномерном пространстве сумма индекса и размерности нулевого пространства совпадают с увеличенным индексом. Поскольку форму I можно сузить на конечномерное пространство $\mathscr{H}$ без изменения индекса и увеличенного индекса, то упомянутый результат также верен и для I, так что $a(I) = i(I) + n(I)$.

В дальнейшем, говоря о *числе* фокальных точек, мы будем иметь в виду сумму их порядков.

Теорема 6. Число фокальных точек многообразия N на $\tau((0, b))$ конечно и не превосходит $i(I)$.

Доказательство. Ввиду задачи 17, леммы 5 и конечности $a(I)$ имеем $h_- + n(I) = \dim \mathscr{H} \leqslant a(I) = i(I) + n(I)$ и потому $h_- \leqslant i(I)$.

11.5. Теорема Морса об индексе [22, 49]

В этом параграфе мы ограничимся случаем $P = \tau(b)$. Теорема Морса об индексе утверждает, что неравенство теоремы 6 является в этом случае равенством.

Теорема 7. Пусть $I = I(N, \tau(b))$. Тогда $a(I)$ совпадает с числом фокальных точек многообразия N на $\tau((0, b])$.

Доказательство основано на изучении поведения формы $I_t = I(N, \tau(t))$, а также целочисленных функций $a(t) = a(I_t)$, $i(t) = i(I_t)$ и $n(t) = n(I)_t$, когда t меняется от 0 до b.

Поскольку при этом область определения I_t можно рассматривать как возрастающую функцию от t, то функции a и i не убывают. При малых t форма I_t положительно определена, поэтому a и i вначале равны нулю.

Мы уже отмечали, что $a=i+n$ и $n(t)=0$ всюду, за исключением конечного числа значений t, где $n(t)$ совпадает с порядком соответствующей фокальной точки. Таким образом, a должно испытывать скачки, которые по меньшей мере прибавляются к сумме этих $n(t)$ (теорема 6).

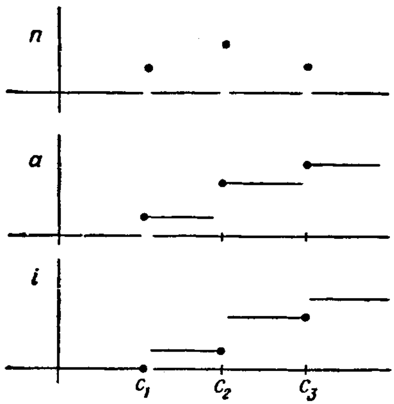

Рис. 41.

С другой стороны, поскольку форма I_t непрерывна по t, то при непрерывном изменении I_t та часть ее, которая из положительно определенной переходит в отрицательно определенную составляющую, обязательно проходит через нулевую составляющую. Поэтому функции a и i терпят разрывы величины $n(t)$ по разные стороны от фокальных значений: скачок функции a слева от t равен $n(t)$, функция же i непрерывна слева, т. е. $a(t)=a(t^-)+n(t)$, $i(t)=i(t^-)$; справа от точки t функция a оказывается непрерывной, n обращается в нуль, и i можно определить из уравнения $a=i+n$, т. е. $a(t^+)=$ $=a(t)$, $i(t^+)=i(t)+n(t)$. Итак, нужно лишь аккуратно показать, что $a(t^+)=a(t)$ и $i(t^-)=i(t)$ для каждого t; тогда теорема проверяется простым подсчетом.

Пусть F_t — инфинитезимальная деформация для I_t с промежуточными многообразиями, проходящими через

$\tau(u_i)$, $i=1, \ldots, n$. Тогда те же промежуточные многообразия пригодны для инфинитезимальной деформации F_u формы I_u, если u принадлежит U, некоторой окрестности точки t. Инфинитезимальная деформация задается вычисляющим отображением E и изоморфизмом G_u: $\mathscr{G} \to \mathscr{H}_u$, где $\mathscr{G} = \sum \perp (u_i)$ — прямая сумма касательных пространств промежуточных многообразий. Отображение $H_u = G_u G_t^{-1} : \mathscr{H}_t \to \mathscr{H}_u$ является изоморфизмом, причем оно изменяет только ту часть поля $Y \in \mathscr{H}_t$, которая определена на $(u_n, t]$; на $[0, u_n]$ поле Y остается неизменным. Значение I_t на Y является суммой членов, из которых только один, $-\langle Y'(u_n^+), Y(u_n)\rangle$, изменяется при отображении H_u, но даже здесь $Y(u_n)$ остается прежним.

Пусть $Y_u = H_u(Y)$. Для доказательства непрерывности $I_u(Y_u)$ как функции от u достаточно доказать, что $Y_u'(u_n^+)$ непрерывно по u. По определению Y_u, сужение его на $[u_n, u]$ является якобиевым полем, удовлетворяющим равенствам $Y_u(u) = 0$ и $Y_u(u_n) = Y(u_n) = y$. Пусть y, $z \in \perp (u_n)$, $Y_{y,z}$ — такое единственное якобиево поле, что $Y_{y,z}(u_n) = y$ и $Y'_{y,z}(u_n) = z$; отображение $(y, z) \to Y_{y,z}$ линейно по y и z и потому является вычисляющим в точке u, следовательно, $Y_{y,z}(u) = A_u(y) + B_u(z)$, где

$$A_u,\ B_u : \perp (u_u) \to \perp (u)$$

— линейные преобразования. Они непрерывны по u, ибо $Y_{y,z}$ непрерывно. Но уравнение $A_u(y) + B_u(z) = 0$ однозначно разрешимо по z, так что B_u^{-1} существует и непрерывно. Таким образом, решение $Y_u'(u_n^+) = z = -B_u^{-1} A_u(y)$ непрерывно по u, откуда следует непрерывность $I_u(Y_u)$.

Пусть теперь $\mathscr{H}^+$ — максимальное подпространство в $\mathscr{H}_t$, на котором форма I_t положительно определена; пусть S^+ — единичная сфера в $\mathscr{H}^+$ относительно I_t. Тогда $a(t) = \operatorname{codim} \mathscr{H}^+$. Далее f: $(u, Y) \to I_u(Y_u)$ — непрерывная функция на $U \times S^+$, положительная на $\{t\} \times S^+$. Так как S^+ компактно, то существует такая окрестность U' точки t, что функция f положительна на $U' \times S^+$ (см. ниже лемму 6). Итак, при $u \in U'$ форма I_u положительно определена на пространстве $H_u(\mathscr{H}^+)$, натянутом на

$H_u(S^+)$, причем $a(u) \leqslant a(t)$. Но a не убывает, и потому $a(t^+) = a(t)$.

То же самое рассуждение, примененное к максимальному подпространству в $\mathscr{K}_t$, на котором I_t отрицательно определено, показывает, что $i(u) \geqslant i(t)$ при u из некоторой окрестности t. Таким образом, $i(t^-) = i(t)$.

Лемма 6. Пусть f — непрерывная вещественная функция на расслоении B с компактным слоем F и базой M. Обозначим через F_p слой над $p \in M$. Определим функции f_m, f_M: $M \to R$, положив

$$f_m(p) = \min\{f(b) | b \in F_p\},$$
$$f_M(p) = \max\{f(b) | b \in F_p\}.$$

Тогда f_m и f_M непрерывны.

Доказательство. Ввиду того что утверждение имеет локальный характер, можно считать, что $B = F \times M$. Для данного $\varepsilon > 0$ можно найти такое конечное покрытие множества $F \times \{p\}$ окрестностями $W_i = V_i \times W$, где W — окрестность точки p, что $|f(b) - f(b')| < \varepsilon$ для всех $b, b' \in W_i$. Тогда для $x \in F$ и $p' \in W$ имеет место неравенство $|f(x, p') - f(x, p)| < \varepsilon$. Далее, если $b_1 = (x_1, p)$ — точка, где $f(b_1) = f_M(p)$, $b_2 = (x_2, p')$ — аналогичная точка для $f_M(p')$, то

$$\begin{aligned} f_M(p') - \varepsilon &= f(x_2, p') - \varepsilon < f(x_2, p) \leqslant f(x_1, p) = \\ &= f_M(p) < f(x_1, p') + \varepsilon \leqslant f(x_2, p') + \varepsilon = \\ &= f_M(p') + \varepsilon, \end{aligned}$$

так что $|f_M(p') - f_M(p)| < \varepsilon$; тем самым доказана непрерывность f_M. Доказательство для f_m вытекает из рассмотрения $-f$.

Задача 18. Пусть J — скалярное произведение $J(Y, Z) = \int_0^b \langle Y, Z \rangle du$ на области определения $\mathscr{L}$ формы $I(N, P)$. Положим $J(Y) = J(Y, Y)$. *Характеристическим значением* формы I относительно J называется число λ, для которого $n(I - \lambda J) \neq 0$; *характеристический* *вектор* формы I, принадлежащий λ, является векторным полем в нулевом пространстве формы $I-\lambda J$. Показать, что

(а) При достаточно отрицательных λ форма $I-\lambda J$ положительно определена.

(б) Поле Y служит характеристическим вектором для I в том и только в том случае, если Y удовлетворяет концевым условиям на N и P ($S_{\tau_*}Y-Y'$ перпендикулярно к N, P) и является решением уравнения второго порядка $Y''+R_{\tau_* Y}\tau_*+\lambda Y=0$.

(в) Увеличенный индекс формы $I-\lambda J$ конечен и равен числу независимых характеристических векторов, принадлежащих значениям $\leqslant\lambda$.

(г) Пусть $P=\tau(b)$ и J_t есть сужение J на область определения I_t. Перенумеруем характеристические значения I_t, начиная с наименьшего и учитывая кратности. Мы получим последовательность функций $\{\lambda_i\}$ от t. Они непрерывны и не возрастают на $(0, b]$, а $n(I_t)$ совпадает с количеством тех i, для которых $\lambda_i(t)=0$.

Задача 19. С каждым $x\in\perp(N)$, не принадлежащим нулевому сечению, связывается индексная форма $I_x=I(N,\exp x)$ геодезической $\exp ux|_{[0,1]}$. Показать, что

(а) Если $n(I_x)=0$, то найдется такая окрестность U точки x, что $i(I_{x'})=i(I_x)$ для каждого $x'\in U$.

(б) Если M полно и N замкнуто в M, то множество $\{m \mid n(I_x)=0$ для каждого ненулевого $x\in\exp^{-1} m\}$ всюду плотно в M (см. задачу 1.11).

Тех, кто интересуется теорией Морса и ее приложениями, мы отсылаем к работам [21, 46, 49, 59, 84, 85].

11.6. Геометрическое место минимумов [29, 40, 41, 77]

Минимальный сегмент — это геодезический сегмент, минимизирующий длину дуги между своими концами. *Точка минимума точки p вдоль геодезической* γ — это такая точка m на γ, что сегмент кривой γ от p до m минимален, но всякий больший сегмент не является минимальным. Множество всех точек минимума точки p называется *геометрическим местом минимумов* (или *разрезов*) точки p.