вектор формы I, принадлежащий λ, является векторным полем в нулевом пространстве формы $I-\lambda J$. Показать, что

(а) При достаточно отрицательных λ форма $I-\lambda J$ положительно определена.

(б) Поле Y служит характеристическим вектором для I в том и только в том случае, если Y удовлетворяет концевым условиям на N и P ($S_{\tau_*}Y - Y'$ перпендикулярно к N, P) и является решением уравнения второго порядка $Y''+R_{\tau_* Y}\tau_* + \lambda Y = 0$.

(в) Увеличенный индекс формы $I-\lambda J$ конечен и равен числу независимых характеристических векторов, принадлежащих значениям $\leqslant\lambda$.

(г) Пусть $P=\tau(b)$ и J_t есть сужение J на область определения I_t. Перенумеруем характеристические значения I_t, начиная с наименьшего и учитывая кратности. Мы получим последовательность функций $\{\lambda_i\}$ от t. Они непрерывны и не возрастают на $(0, b]$, а $n(I_t)$ совпадает с количеством тех i, для которых $\lambda_i(t)=0$.

Задача 19. С каждым $x\in\perp(N)$, не принадлежащим нулевому сечению, связывается индексная форма $I_x=I(N, \exp x)$ геодезической $\exp ux|_{[0,1]}$. Показать, что

(а) Если $n(I_x)=0$, то найдется такая окрестность U точки x, что $i(I_{x'})=i(I_x)$ для каждого $x'\in U$.

(б) Если M полно и N замкнуто в M, то множество $\{m \mid n(I_x)=0$ для каждого ненулевого $x\in\exp^{-1}m\}$ всюду плотно в M (см. задачу 1.11).

Тех, кто интересуется теорией Морса и ее приложениями, мы отсылаем к работам [21, 46, 49, 59, 84, 85].

11.6. Геометрическое место минимумов [29, 40, 41, 77]

Минимальный сегмент — это геодезический сегмент, минимизирующий длину дуги между своими концами. *Точка минимума точки p вдоль геодезической* γ — это такая точка m на γ, что сегмент кривой γ от p до m минимален, но всякий больший сегмент не является минимальным. Множество всех точек минимума точки p называется *геометрическим местом минимумов* (или *разрезов*) точки p.

Так как геодезические не минимизируют длину дуги далее первой сопряженной точки, то мы сразу же заключаем, что если m — первая точка, сопряженная с p вдоль γ, то не далее m расположена точка минимума точки p вдоль γ.

Геодезический луч, выходящий из p, содержит самое большее одну точку минимума точки p, хотя может и не содержать их вовсе.

Пусть $t \in M_p$ и $\exp_p t$ — точка минимума точки p вдоль геодезической $\exp_p ut$; тогда говорят, что t — *точка минимума точки p в M_p.*

Теорема 8. (а) Если m не является точкой минимума точки p, то имеется не более одного минимального сегмента γ, соединяющего p с m. Если $\{\sigma_i\}$ — последовательность кривых, соединяющих p с m и таких, что $\lim|\sigma_i| = \rho(p, m)$, то (при надлежащей параметризации) σ_i сходятся к γ.

(б) Если существует минимальный сегмент от p до m, на котором точка m сопряжена с p, то m — точка минимума точки p.

(в) Если M полно, то верно и обратное: если m — точка минимума точки p, то либо имеется два минимальных сегмента, либо точка m сопряжена с p вдоль единственного сегмента.

Доказательство. (а) Первое утверждение вытекает из второго, поскольку если бы γ и σ оба были минимальными сегментами, то, положив $\sigma_i = \sigma$ для всех i, мы получили бы $\lim \sigma_i = \sigma = \gamma$.

Предположим, что γ и каждое σ_i параметризованы длиной дуги. В силу компактности шара в нормальных координатах с центром m и радиусом ε, множество $\{\sigma_i(L_i - \varepsilon)\}$, где $L_i = |\sigma_i|$, содержит сходящиеся подпоследовательности. Если бы какая-нибудь из них не сходилась к $\gamma(L - \varepsilon)$, где $L = \rho(p, m)$, то соответствующие кривые в конце концов образовали бы угол с продолжением γ за точку m. Срезая этот угол, мы получили бы кривые из p в $\gamma(L+\varepsilon)$ меньшей длины, чем $L+\varepsilon$, что противоречит минимальности сегмента γ, продолженного за точку m.

Это рассуждение можно провести аккуратно, используя только неравенство треугольника и свойство локальной минимальности геодезических, причем можно даже показать, что σ_i сходятся к γ в пределах регулярной окрестности точки m. Покрыв γ конечным числом регулярных окрестностей, эту сходимость можно доказать по индукции вдоль γ от m до p. Под термином «регулярный» подразумевается следующее: всякие две точки в такой окрестности можно соединить единственным минимальным сегментом. В качестве упражнения читатель может провести подробное доказательство.

(б) Это утверждение следует непосредственно из того, что геодезические не минимизируют длину дуги за первой сопряженной точкой.

(в) Предположим, что M полно и m — такая точка минимума точки p, с которой ее соединяет единственный минимальный сегмент γ. Нужно показать, что m — сопряженная точка вдоль γ.

Пусть $L=\rho(p, m)$ и σ_i — минимальный сегмент от p до $m_i=\gamma(L+1/i)$, параметризованный длиной дуги, причем $|\sigma_i|=L_i$. Тогда последовательность $\{\sigma_{i*}(0)\}$ должна иметь предельные точки; но геодезические в направлениях таких предельных точек дают минимальные сегменты от p до m, поэтому $\lim \sigma_{i*}(0)=\gamma_*(0)$. Но тогда

$$\exp_p(L_i\sigma_{i*}(0))=m_i=\exp_p\left(L+\frac{1}{i}\right)\gamma_*(0)$$

и

$$\lim L_i\sigma_{i*}(0)=\lim\left(L+\frac{1}{i}\right)\gamma_*(0)=L\gamma_*(0),$$

так что отображение $\exp_p$ не взаимно однозначно в окрестности $L\gamma_*(0)$. Поэтому там $d\exp_p$ вырождено, и, значит, m — сопряженная точка.

Задача 20. Показать, что указанная в (а) сходимость σ_i к γ равномерна.

Задача 21. Показать, что отношение «минимальности» симметрично. Таким образом, если γ — минимальный сегмент от p до ее точки минимума m, то существуют кривые меньшей длины, чем γ, соединяющие m с точками продолжения γ за точку p.

Задача 22. Предположим, что M связно. Будем говорить, что m находится *между* p и q, если все три точки различны и $\rho(p, m)+\rho(m, q)=\rho(p, q)$; это отношение обозначается через $[p, m, q]$. Показать, что

(а) Если $[p, m, q]$, $[p, n, q]$ и $[p, m, n]$, то $[m, n, q]$ и минимальный сегмент γ от m до n единствен. В случае когда γ существует, обозначим через σ наибольшее (открытое) геодезическое продолжение γ, не содержащее p или q. Тогда каждая точка σ находится между p и q. Отсюда $|\sigma|\leqslant\rho(p, q)$ и σ не содержит точек минимума любой из своих точек.

(б) Если M неполно, то для каждого $p\in M$ найдется геодезический луч из p, на котором нет точки минимума точки p.

(в) Если M полно, то $[p, m, q]$ тогда и только тогда, когда m содержится в открытом минимальном сегменте с концами p и q.

Пусть $Q(M)=\{t\in T(M)\mid t$ — единичный вектор и $c_t t$ — точка минимума точки $\pi' t$ при некотором $c_t>0\}$. Определим $f\colon Q(M)\to M$, положив $f(t)=\exp c_t t$, так что при этом отображении касательной t соответствует точка минимума (если она существует) начальной точки вектора t вдоль выходящей из нее геодезической в направлении t.

Теорема 9. Отображение f непрерывно.

Доказательство. Мы хотим показать, что, если $\{t_i\}$ — сходящаяся последовательность в $Q(M)$, то $\lim f(t_i)=f(\lim t_i)$. Пусть $\gamma_i=\exp ut_i$, $p_i=\gamma_i(0)$, $m_i=f(t_i)=\gamma_i(c_i)$, $t=\lim t_i$, $\gamma=\exp ut$, $p=\gamma(0)$ и $m=f(t)=\gamma(c)$. Достаточно показать, что $\lim c_i=c$, ибо тогда, в силу непрерывности exp,

$$\lim m_i=\lim \exp c_i t_i=\exp \lim c_i t_i=\exp(\lim c_i \lim t_i)=$$
$$=\exp ct=m.$$

Предположим, что $\limsup c_i>c$. Тогда существуют такие $\varepsilon>0$, подпоследовательность $\{d_i\}\subset\{c_i\}$ и k, что $d_i>c+\varepsilon$ при $i>k$ и $\gamma(c+\varepsilon)$ существует. Тогда для соответствующих подпоследовательностей $\{\sigma_i\}\subset\{\gamma_i\}$, $\{n_i\}\subset\{m_i\}$

и $\{q_i\}\subset\{p_i\}$ сегмент σ_i является минимальным от q_i до $\sigma_i(c+\varepsilon)$, так что

$$c+\varepsilon=\lim\rho(q_i,\ \sigma_i(c+\varepsilon))=$$
$$=\rho(\lim q_i,\ \lim\sigma_i(c+\varepsilon))=\rho(p,\ \gamma(c+\varepsilon))$$

вопреки тому, что γ не минимизирует длину дуги за точкой $\gamma(c)=m$.

Для доказательства равенства $\liminf c_i=c$ рассмотрим сходящиеся подпоследовательности; предположим, что $\lim c_i=c'<c$, и придем к противоречию. Пусть $\varepsilon=(c-c')/2>0$. Тогда точка $q_i=\gamma_i(c_i+\varepsilon)$ расположена за точкой минимума точки p_i на γ_i, и, значит, найдется более короткая кривая τ_i, соединяющая p_i с q_i. Добавив к τ_i короткие сегменты от p до p_i и от q_i до $q=\gamma(c'+\varepsilon)$, получим кривую σ_i от p до q, такую, что $\lim|\sigma_i|=\rho(p,\ q)$. По теореме 8(а), σ_i сходятся к γ, и потому τ_i тоже сходятся к γ.

Пусть $E=\pi'\times\exp$: $T(M)\to M\times M$. Отображение E невырождено на компактном множестве $\{ut\,|\,0\leqslant u\leqslant c'+\varepsilon\}$, поэтому, в силу задачи 1,12, существует окрестность U, на которой E является диффеоморфизмом. Пусть $V=E(U)$, тогда V — окрестность точки $E(ut)=(p,\gamma(u))$. При достаточно большом i и $(p_i,\gamma_i(u))$, и $(p_i,\tau_i(u))$ принадлежат V. Однако длина $E^{-1}(p_i,\ q_i)$ должна равняться $c_i+\varepsilon$, поскольку $q_i=\exp_{p_i}(c_i+\varepsilon)t_i$, а с другой стороны, она не может превосходить интеграла радиальных длин τ_i, который меньше, чем $c_i+\varepsilon$. Ч. Т. Д.

Следствие 1. Расстояние от фиксированной точки p до ее точки минимума в направлении $t\in M_p$ является непрерывной функцией от t там, где она определена.

(Это сразу же вытекает из непрерывности функции расстояния.)

Предположим теперь, что M связно.

Следствие 2. Риманово многообразие M компактно в том и только в том случае, если для некоторой точки p в любом направлении найдется ее точка минимума.

Доказательство. Если M компактно, то M полно и ограничено. Таким образом, всякий геодезический луч неограниченно продолжаем, однако его сегмент не может минимизировать длину дуги, если его длина больше максимума расстояния на M.

Обратно, если p — такая точка, что каждый геодезический луч, выходящий из p, содержит точку минимума, то функция g: $S \to R$, где S — единичная сфера в M_p, $g(t) = \rho(p, \exp c_t t)$, непрерывна в силу следствия 1. Тогда множество

$$B = \{t \in M_p \mid \|t\| \leqslant g(t/\|t\|) \text{ или } t = 0\}$$

замкнуто и ограничено в M_p и, следовательно, компактно. Но тогда компактно и множество $M = \exp B$ [см. задачу 22(б)].

Следствие 3. Если каждый геодезический луч, выходящий из точки p, содержит точку, сопряженную с p, то M компактно.

Следствие 4. Если некоторое накрывающее пространство полного многообразия M не компактно, то из каждого $p \in M$ выходит геодезический луч, на котором нет точек, сопряженных с p.

Доказательство. Можно считать, что данное накрытие является римановым. Тогда проекция сохраняет геодезические, а значит, и сопряженные точки. По следствию 3, некоторая геодезическая, выходящая из точки, расположенной над p, не содержит сопряженных точек, поэтому они отсутствуют и на проекции этой геодезической.

Следствие 5. Если M полно, то расстояние до геометрического места минимумов является непрерывной функцией на M.

Доказательство. Пусть $f(p)$ — расстояние от p до геометрического места минимумов; положим

$$g(p) = \begin{cases} e^{-f(p)}, & \text{если } p \text{ не имеет точки минимума,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Достаточно проверить непрерывность g. Пусть $h(p, t)$ — расстояние от точки p до ее точки минимума на геодезической, выходящей в направлении $t \in M_p$. Тогда h непрерывно на $Q(M)$, и функция

$$\bar{g}(p, t) = \begin{cases} e^{-h(p, t)}, & \text{если } h(p, t) \text{ определено,} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

непрерывна на всем единичном касательном расслоении, так как если $(p, t) \in T(M)$ — предельная точка $Q(M)$, то $\lim\limits_{x \to (p, t)} h(x) = +\infty$, как следует из первой части доказательства теоремы 9.

Поскольку ясно, что g является послойным максимумом функции $\bar{g}$, то наше утверждение вытекает из леммы 6.

Замечание. Следствие 1 показывает, что дополнение к геометрическому месту минимумов некоторой точки является топологической клеткой, когда M полно; в действительности этот гомеоморфизм осуществляется экспоненциальным отображением. Следовательно, с топологической точки зрения вместо многообразия часто можно рассматривать его геометрическое место минимумов.

Задача 23. Распространить результаты этого параграфа, за исключением теоремы 9, на случай, когда вместо p рассматривается замкнутое или компактное (смотря по обстоятельствам) подмногообразие N. В частности, показать на примерах, что обобщения следствий 2, 3 и 4 требуют компактности N.

11.7. Замкнутые геодезические

Замкнутая геодезическая — это геодезический сегмент, начальная и конечная точки которого совпадают; замкнутая геодезическая называется *гладкой*, если при этом совпадают начальная и конечная касательные.

Интуитивно ясно, что на полном многообразии в гомотопическом классе петель с началом в точке p содержится петля минимальной длины, которая должна быть