Достаточно проверить непрерывность g. Пусть $h(p, t)$ — расстояние от точки p до ее точки минимума на геодезической, выходящей в направлении $t \in M_p$. Тогда h непрерывно на $Q(M)$, и функция

$$\bar{g}(p, t) = \begin{cases} e^{-h(p,t)}, & \text{если } h(p, t) \text{ определено,} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

непрерывна на всем единичном касательном расслоении, так как если $(p, t) \in T(M)$ — предельная точка $Q(M)$, то $\lim\limits_{x \to (p,t)} h(x) = +\infty$, как следует из первой части доказательства теоремы 9.

Поскольку ясно, что g является послойным максимумом функции $\bar{g}$, то наше утверждение вытекает из леммы 6.

Замечание. Следствие 1 показывает, что дополнение к геометрическому месту минимумов некоторой точки является топологической клеткой, когда M полно; в действительности этот гомеоморфизм осуществляется экспоненциальным отображением. Следовательно, с топологической точки зрения вместо многообразия часто можно рассматривать его геометрическое место минимумов.

Задача 23. Распространить результаты этого параграфа, за исключением теоремы 9, на случай, когда вместо p рассматривается замкнутое или компактное (смотря по обстоятельствам) подмногообразие N. В частности, показать на примерах, что обобщения следствий 2, 3 и 4 требуют компактности N.

11.7. Замкнутые геодезические

Замкнутая геодезическая — это геодезический сегмент, начальная и конечная точки которого совпадают; замкнутая геодезическая называется *гладкой*, если при этом совпадают начальная и конечная касательные.

Интуитивно ясно, что на полном многообразии в гомотопическом классе петель с началом в точке p содержится петля минимальной длины, которая должна быть геодезической. В самом деле, в односвязном накрытии такой класс представлен классом всех кривых, соединяющих точки p_0 и p_1, расположенные в слое над p. Минимальный сегмент от p_0 до p_1 проектируется в замкнутую геодезическую из рассматриваемого класса и, очевидно, имеет минимальную длину в нем. Чтобы не исключать из рассмотрения единичный элемент фундаментальной группы, постоянную кривую также нужно считать замкнутой геодезической.

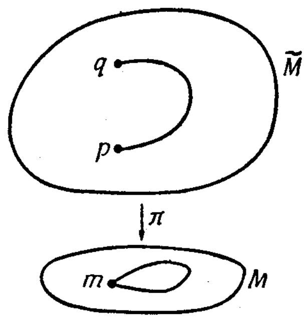

Рис. 42.

Чтобы получить гладкие замкнутые геодезические, рассмотрим свободные гомотопические классы петель. Эти классы находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженных элементов фундаментальной группы, поскольку, грубо говоря, изоморфизм между фундаментальными группами, отнесенными к разным точкам, неразличимыми при свободной гомотопии, определяется лишь с точностью до внутреннего автоморфизма, или сопряжения. Свободный гомотопический класс петель не всегда содержит элемент минимальной длины, даже если M полно, поскольку при стягивании петля может уйти в «бесконечность»: например на поверхности, полученной вращением кривой $xz=1$ вокруг оси z.

Однако если M компактно, то в каждом свободном гомотопическом классе содержится минимальный элемент. В самом деле, такой класс A представляется подъемами своих элементов в односвязное накрытие $\tilde{M}$.

Пусть

$$b=\inf\{\rho(p,\ q)\mid, \text{ если } \sigma - \text{кривая от } p \text{ до } q, \text{ то } \pi\circ\sigma\in A\},$$

где π: $\tilde{M}\to M$ — накрывающее отображение. Возьмем такую последовательность $\{(p_i,\ q_i)\}$, что $\lim\rho(p_i,\ q_i)=b$, а также последовательность минимальных сегментов γ_i, соединяющих p_i с q_i. В силу компактности M, из последовательности замкнутых геодезических $\pi\circ\gamma_i$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Предел будет минимальной замкнутой геодезической в классе A и притом гладкой, ибо она является минимальным элементом гомотопического класса, отнесенного к любой из своих точек.

Теорема 10. Если M — компактное риманово многообразие, то всякий свободный гомотопический класс петель содержит элемент минимальной длины, являющийся гладкой замкнутой геодезической.

Задача 24. Пусть σ — петля из свободного гомотопического класса A. Тогда σ можно равномерно приблизить ломаной геодезической петлей $\gamma_0\in A$. Пусть M компактно. Тогда можно считать, что изломы γ_0 ближе друг к другу, чем расстояние от произвольной точки до ее геометрического места минимумов. По индукции строится последовательность ломаных геодезических петель γ_i, сегментами которых служат минимальные сегменты между серединами сегментов γ_{i-1}. Показать, что $\gamma_i\in A$ и что некоторая ее подпоследовательность сходится к гладкой замкнутой геодезической из A.

Теорема 11 (теорема Синга [69]). Пусть M — компактное, ориентируемое четномерное многообразие, все плоские сечения которого имеют положительную кривизну. Тогда многообразие M односвязно.

Доказательство. Основная идея — используя вторую вариацию, показать, что нетривиальная гладкая замкнутая геодезическая не может быть минимальной, а затем, по теореме 10, из этого результата будет следовать, что все петли образуют один тривиальный гомотопический класс, т. е. M односвязно.

Пусть γ — гладкая замкнутая геодезическая. Тогда однократный параллельный перенос вдоль γ является ортогональным преобразованием T нечетномерного нормального пространства к γ. Так как M ориентируемо, то определитель T равен 1, и потому по крайней мере одно

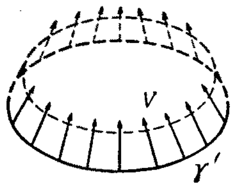

Рис. 43.

характеристическое значение равно 1. (Абсолютные величины характеристических значений T равны 1, причем невещественные значения встречаются сопряженными парами.) Характеристические векторы, принадлежащие значению 1, являются неподвижными точками преобразования T, так что вдоль γ имеется гладкое параллельное поле V. Обозначая через N произвольное трансверсальное многообразие и через I форму $I(N, N)$, найдем, что в выражении для $I(V)$ концевые члены пропадают, а так как $V'=0$, то

$$I(V) = -\int_0^b K(\gamma_*, V)\langle V, V\rangle du.$$

Так как кривизна положительна, то это выражение отрицательно, и, значит, вблизи имеются более короткие кривые, поэтому геодезическая γ не может быть минимальной. Ч. Т. Д.

Задача 25. Пусть M компактно, четномерно, неориентируемо и имеет положительную кривизну. Показать, что фундаментальная группа M есть Z_2.

Задача 26. Пусть M — компактное нечетномерное многообразие, кривизна плоских сечений которого положительна. Показать, что M ориентируемо.

Задача 27. Пусть M — компактное кэлерово многообразие с положительной голоморфной кривизной. Показать, что M односвязно. [*Указание*: если γ — геодезическая, J — оператор комплексной структуры, то $J(\gamma_*)$ параллельно вдоль γ и γ_*, $J(\gamma_*)$ порождают голоморфное сечение.]

Свойства геометрического места минимумов позволяют иногда доказать существование замкнутых геодезических по методу Клингенберга [28].

Теорема 12. Пусть M — полное многообразие, p — точка в M с непустым геометрическим местом минимумов, и m — ближайшая к p точка минимума. Если точка m не сопряжена с p, то через m проходит единственная замкнутая геодезическая с концами в p, оба сегмента которой, соединяющие m с p, минимальны.

Доказательство. В силу теоремы 8, если m не является сопряженной точкой, то имеется по крайней мере два минимальных сегмента от p до m. Покажем, что их в точности два и что они гладко смыкаются в точке m. Пусть γ_1 и γ_2 — любые два минимальных сегмента. Если они не смыкаются гладко в m, то существует геодезическая σ, выходящая из m и образующая

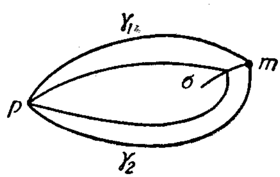

Рис. 44.

острые углы с γ_1 и γ_2. Тогда вблизи γ_1 и γ_2 найдутся более короткие минимальные сегменты, соединяющие p с точками геодезической σ, расположенными вблизи m. Так как γ_1 и γ_2 различны, то и эти сегменты различны, когда концы их на σ достаточно близки к m. В силу теоремы 8, эти точки кривой σ являются точками минимума точки p в противоречие с тем, что m — ближайшая к p точка минимума.

Следствие 1. Пусть M компактно, и (p, m) — пара точек, реализующая минимум расстояния от произвольной точки до ее геометрического места минимумов. Тогда либо p и m сопряжены, либо через p и m проходит единственная гладкая замкнутая геодезическая, оба сегмента которой минимальны.

Следствие 2. Пусть M компактно, четномерно, ориентируемо и имеет положительную кривизну, а p и m — такие же, как в следствии 1. Тогда p и m сопряжены.

Доказательство. Предположим, что p и m не сопряжены, так что, по следствию 1, через p и m проходит единственная гладкая замкнутая минимальная геодезическая петля γ, $\gamma(0)=p$. Используя прием, предложенный Сингом, получаем однопараметрическое семейство

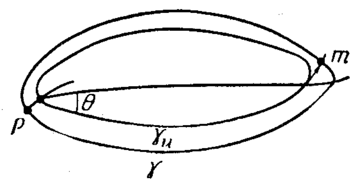

Рис. 45.

гладких петель γ_u, таких, что $\gamma_0=\gamma$ и $|\gamma_u|<|\gamma|$ при $u\neq 0$. Тогда однозначно определенные минимальные сегменты от $\gamma_u(0)$ до других точек кривой γ_u образуют все возможные углы с γ_u в точке $\gamma_u(0)$. Совокупность минимальных сегментов, образующих фиксированный угол θ, содержит последовательность, сходящуюся по параметру u к минимальному сегменту, соединяющему p с некоторой точкой m' на γ. В силу единственности m как точки минимума точки p вдоль γ, m' необходимо совпадает с m. Это противоречит тому, что p соединяет с m не более двух минимальных сегментов.

Замечание. Это следствие показывает, что при указанных условиях найдутся точки, геометрические места сопряженных точек и точек минимума которых пересекаются. Этот факт можно использовать для оценки снизу диаметра многообразия с помощью оценки его кривизны сверху. При более сильном предположении, — когда M есть односвязное риманово симметрическое пространство, — геометрические места минимумов и сопряженных точек совпадают [36, 66].

11.8. Выпуклые окрестности [77; 80, стр. 94; 94]

Множество B в римановом многообразии M *выпукло*, если любые две его точки соединяет единственный минимальный сегмент, содержащийся в B. Открытый шар $B(m, r_0)$ радиуса r_0 с центром m является *локально выпуклым*, если каждая сфера $S(m, r)$ радиуса $r<r_0$ с центром m удовлетворяет следующему *условию выпуклости*: если геодезическая γ касается $S(m, r)$ в некоторой точке $n=\gamma(0)$, то $\rho(m, \gamma(u))\geqslant r$ при достаточно малых u.

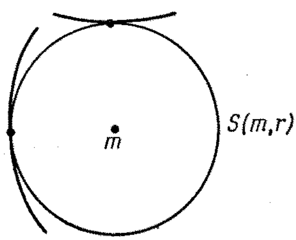

Рис. 46.

Если $B(m, r_0)$ локально выпукло, то отображение $\exp_m$ должно быть взаимно однозначным на $B(0, r_0)\subset M_m$, поскольку в противном случае в $B(m, r_0)$ нашлись бы точки минимума точки m. А тогда если бы γ была перпендикулярной к τ в точке $\tau(r)$, расположенной за точкой минимума на геодезической τ, выходящей из m, то $\rho(m, \gamma(u))$ было бы меньше чем r при малых u, так как $\rho(m, \tau(r))<r$.

Понятия выпуклости и локальной выпуклости связаны не столь просто, как в евклидовых пространствах. Например, в нормальных координатах на плоском цилиндре шар диаметра, превосходящего половину длины окружности цилиндра, будет локально выпуклым, но не выпуклым, поскольку он содержит противоположные