снизу диаметра многообразия с помощью оценки его кривизны сверху. При более сильном предположении, — когда M есть односвязное риманово симметрическое пространство, — геометрические места минимумов и сопряженных точек совпадают [36, 66].

11.8. Выпуклые окрестности [77; 80, стр. 94; 94]

Множество B в римановом многообразии M *выпукло*, если любые две его точки соединяет единственный минимальный сегмент, содержащийся в B. Открытый шар $B(m, r_0)$ радиуса r_0 с центром m является *локально выпуклым*, если каждая сфера $S(m, r)$ радиуса $r<r_0$ с центром m удовлетворяет следующему *условию выпуклости*: если геодезическая γ касается $S(m, r)$ в некоторой точке $n=\gamma(0)$, то $\rho(m, \gamma(u))\geqslant r$ при достаточно малых u.

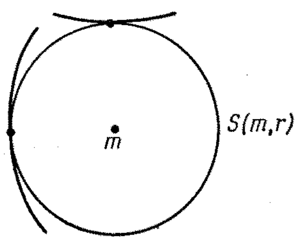

Рис. 46.

Если $B(m, r_0)$ локально выпукло, то отображение $\exp_m$ должно быть взаимно однозначным на $B(0, r_0)\subset M_m$, поскольку в противном случае в $B(m, r_0)$ нашлись бы точки минимума точки m. А тогда если бы γ была перпендикулярной к τ в точке $\tau(r)$, расположенной за точкой минимума на геодезической τ, выходящей из m, то $\rho(m, \gamma(u))$ было бы меньше чем r при малых u, так как $\rho(m, \tau(r))<r$.

Понятия выпуклости и локальной выпуклости связаны не столь просто, как в евклидовых пространствах. Например, в нормальных координатах на плоском цилиндре шар диаметра, превосходящего половину длины окружности цилиндра, будет локально выпуклым, но не выпуклым, поскольку он содержит противоположные точки, которые могут быть соединены двумя минимальными сегментами. С другой стороны, если $S(m, r)$ не удовлетворяет условию выпуклости, то $B(m, r)$ не может быть выпуклым. Для доказательства возьмем геодезическую γ, касающуюся $S(m, r)$ в точке $n=\gamma(0)$ и содержащую вблизи n точку $p=\gamma(u)$ внутри $S(m, r)$. Тогда якобиеву полю вдоль γ, направленному наружу в точке p и обращающемуся в нуль в точке n, соответствует прямоугольник с геодезическими продольными, из которых лишь γ касается $S(m, r)$. Таким образом, нашлись бы сегменты, начинающиеся вблизи p, выходящие из $S(m, r)$ и возвращающиеся в $S(m, r)$ в точке n. Все же может случиться, что $B(m, r')$ выпукло при некотором $r'>r$.

Пример плоского цилиндра показывает, что следующее утверждение является наилучшим результатом такого рода.

Предложение 1. Пусть $B(m, 2r_0)$ — локально выпуклый шар. Тогда каждый минимальный сегмент, соединяющий пару точек в $B(m, r_0)$, целиком содержится в $B(m, r_0)$.

Доказательство. Минимальный сегмент γ, соединяющий пару точек в $B(m, r_0)$, не выходит из $B(m, 2r_0)$. Если бы $\rho(m, \gamma)$ не принимало максимального значения ни в одном из концов γ, то наименьшее значение параметра кривой γ, при котором $\rho(m, \gamma)$ максимально, дало бы точку касания γ со сферой $S(m, r)$, $r<2r_0$, вблизи которой γ попадает внутрь этой сферы в противоречие с локальной выпуклостью шара $B(m, 2r_0)$. Итак, максимум $\rho(m, \gamma)$ достигается в конце кривой γ, так что весь этот сегмент находится внутри $B(m, r_0)$.

Если τ — геодезическая, соединяющая m с $n=\tau(r)$, то подмногообразие $N=\exp_n(\tau_*(r)^{\perp})\cap U$, где U—окрестность точки n, содержит все малые геодезические сегменты, касающиеся $S(m, r)$ в точке n. Таким образом, индексная форма $I=I(m, N)$ в значительной степени определяет, удовлетворяет ли $S(m, r)$ условию выпуклости в точке n. Если индекс I отличен от нуля, то на N найдутся точки, менее, чем n, удаленные от m. Значит если

$S(m, r)$ удовлетворяет условию выпуклости, то форма I положительно полуопределена; если же форма I положительно определена, то для выпуклости $S(m, r)$ в n достаточно потребовать, чтобы точка n находилась не далее точки минимума точки m на геодезической τ.

В свою очередь положительная (полу)определенность I определяется поведением m-якобиевых полей вдоль τ, ибо если V является m-якобиевым полем, то в выражении для $I(V)$ концевые члены обращаются в нуль, поскольку вторая фундаментальная форма многообразия N в точке n равна нулю. Поэтому $I(V) = \langle V'(r), V(r)\rangle$, в силу следствия 3 леммы 2. Итак, имеет место

Предложение 2. Пусть $\mathscr{K}$ — пространство m-якобиевых полей вдоль геодезической τ, выходящей из точки m и параметризованной длиной дуги. Пусть b_r — квадратичная форма на $\mathscr{K}$ вида $b_r(V) = \langle V'(r), V(r)\rangle$.

(а) Если $B(m, r_0)$ — локально выпуклый шар, то форма b_r положительно полуопределена при $r \in (0, r_0)$.

(б) Если $B(m, r_0)$ — шар в нормальных координатах и форма b_r положительно определена при всех таких τ и всех $r \in (0, r_0)$, то шар $B(m, r_0)$ является локально выпуклым.

Если все такие b_r положительно определены, то $B(m, r_0)$ называется *строго локально выпуклым*, сокращенно СЛВ.

Задача 28. Пусть $B(m, r_0)$ — нормальный координатный шар, τ — геодезическая, выходящая из m, и $z = \tau_*(r)$, где $r \in (0, r_0)$. Тогда значения m-якобиевых полей $\{V(r) \mid V \in \mathscr{K}\}$ образуют касательное пространство к $S(m, r)$ в $\tau(r)$. Показать, что

(а) $\mathscr{K}$ — пространство $S(m, r)$-якобиевых полей вдоль τ, так что m является фокальной точкой многообразия $S(m, r)$ порядка $d - 1$.

(б) Вторая фундаментальная форма H_z многообразия $S(m, r)$, по существу, совпадает с b_r.

Задача 29. Показать из соображений непрерывности, что шар $B(m, r)$ есть СЛВ при достаточно малых r.

Если $B(m, r)$ локально выпукло, но не есть СЛВ, то $B(m, r_1)$ не есть СЛВ при $r_1>r$. Показать на примерах, что $B(m, r)$ может быть нормальным при всех r, СЛВ при $r\in(0, a)$, локально выпуклым при $r\in[a, b]$, но не локально выпуклым при $r>b$, где a, b подчинены лишь условию $a\leqslant b\leqslant\infty$.

Задача 30. Подмногообразие называется *минимальным*, если все его вторые фундаментальные формы имеют нулевой след, т. е. $\operatorname{tr} S_z=0$ для каждого нормального z. Показать, что компактное минимальное подмногообразие нельзя погрузить в сильно локально выпуклый шар.

Задача 31. Пусть $B(m, r_0)$ — сильно локально выпуклый шар, N — компактное многообразие, погруженное в $B(m, r_0)$ и наделенное индуцированной метрикой. Предполагается, что $1+2\dim N>d=\dim M$. С помощью нижеследующей теоремы Отсуки [57, 58] показать, что имеется такое плоское сечение P, для которого $K_N(P)>K_M(P)$.

Пусть V — вещественное векторное пространство размерности n. Пусть $Q_1, \ldots, Q_k$, $k<n$, — симметрические билинейные вещественные формы на V, для которых

$$\sum_j (Q_j(u, u)\,Q_j(v, v)-Q_j(u, v)^2)\leqslant 0$$

при всех $u, v\in V$.

Тогда существует по меньшей мере один такой ненулевой вектор $u\in V$, что $Q_j(u, u)=0$ для всех j.

Доказать эту теорему в случае $k=1$.

Задача 32. Показать, что каждый шар в евклидовом d-пространстве является сильно локально выпуклым. Далее с помощью предыдущей задачи показать, что плоский e-мерный тор можно вложить изометрически в E^d, если только $d\geqslant 2e$.

Для более точных оценок размеров СЛВ шаров можно применять следующую теорему.

Теорема 13. Пусть H — положительная верхняя грань плоских кривизн многообразия M и $r_0=\pi/2H^{1/2}$. Тогда каждый нормальный координатный шар радиуса $r \leqslant r_0$ является СЛВ. Если плоские кривизны неположительны, то каждый нормальный координатный шар является СЛВ.

Доказательство. Для каждого m-якобиева поля V

$$b_r(V) = I(V) = \int_0^r (\langle V', V' \rangle - K(\tau_*, V)\langle V, V\rangle)\, du \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^r (\langle V', V' \rangle - H\langle V, V\rangle)\, du$$

[как прежде, здесь $I = I(m, N)$].

Это последнее выражение выглядит как вторая вариация векторного поля V на некотором римановом многообразии P постоянной кривизны H. Нетрудно видеть, что его можно рассматривать именно таким образом и, значит, можно применить основное неравенство при условии, что $r < \pi/H^{1/2}$, расстояния до первых сопряженных точек на P. Всякое m-якобиево поле на P имеет вид $W = \sin(H^{1/2}u)E$, где E — параллельное поле. При $E(r) = V(r)$ основное неравенство на многообразии P дает

$$b_r(V) \geqslant \langle W'(r), W(r)\rangle =$$
$$= H^{1/2}\sin(H^{1/2}r)\cos(H^{1/2}r)\langle E, E\rangle.$$

Таким образом, b_r положительно определено при $r < r_0$. Ч. Т. Д.

Задача 33. Пусть C — компактное подмножество в M. Показать, что существует такое $r > 0$, что шар $B(m, r)$ является выпуклым и СЛВ, если $m \in C$.

Задача 34. Пусть M полно, односвязно и имеет неположительную кривизну. Тогда каждый шар в M является выпуклым.

Задача 35. Пусть M имеет неположительную кривизну; предположим, что выпуклый шар B содержит геодезический треугольник с длинами сторон a, b, c и противоположными углами α, β, γ. Показать, что

$$a^2+b^2-2ab\cos\gamma\leqslant c^2$$

$$\alpha+\beta+\gamma\leqslant\pi \qquad [80, \text{стр. } 88].$$

Топоногов обобщил этот результат на случай произвольной кривизны (см. [9] и [75]).

Замечание. Приведенные выше рассуждения, включающие рассмотрения индексных форм многообразий M и P, составляют часть доказательства теоремы сравнения Рауха. Теорию индексной формы можно обобщить на интегралы, не связанные с P. Для этого *преобразование Риччи* R_X: $V\to R_{XV}X$ заменяется произвольным гладким полем S симметрических линейных преобразований нормальных пространств к τ. Такая общность достаточна для наших целей, однако Морс рассматривал даже более общие формы [49].

Если имеются концевые многообразия N и P, то, сохраняя концевые члены, мы получаем квадратичную форму I_S вида

$$I_S(V)=\langle S_{\tau_*(0)}V(0),\ V(0)\rangle-\langle S_{\tau_*(b)}V(b),\ V(b)\rangle+$$
$$+\int_0^b(\langle V',\ V'\rangle-\langle SV,\ V\rangle)\,du.$$

Далее, N-S-полем V называется поле вдоль τ, удовлетворяющее концевым условиям на N и уравнению $V''+SV=0$, а S-фокальной точкой многообразия N называется точка на τ, в которой ненулевое N-S-поле обращается в нуль. Имеет место основное неравенство, принимающее следующую форму.

Предположим, что на τ нет S-фокальных точек многообразия N; для $V\in\mathscr{L}$ найдется единственное N-S-поле Y, такое, что $Y(b)=V(b)$. Тогда $I_S(V)\geqslant I_S(Y)$, причем равенство достигается, если только $V=Y$.

Наиболее важным является случай, когда S получается из преобразования Риччи некоторого риманова многообразия. Приведенное выше доказательство, где S тождественно, является типичным (см. задачу 18).