11.9. Теорема сравнения Рауха [9, 64, 65]

Мы уже рассматривали частный случай (теорема 9.2) теоремы сравнения Рауха, кроме того, некоторые идеи использовались в доказательстве теоремы 13. В случае $d=2$ аналитическое содержание теоремы Рауха, по существу, совпадает с теоремой сравнения Штурма для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Теорема 14. Пусть M и N — римановы многообразия, σ и τ — геодезические сегменты, параметризованные длиной дуги на $[0, b]$ и начинающиеся в точках $m \in N$ и $n \in N$ соответственно. Предположим, что на τ нет точек,

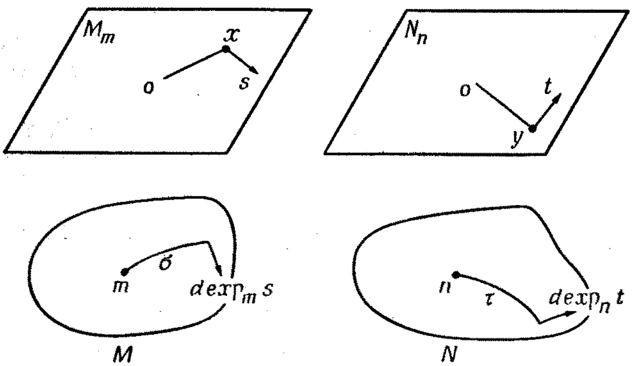

Рис. 47.

сопряженных с n. Пусть $K_M(P) \leqslant K_N(Q)$ для всех плоских сечений P и Q, касательных к σ и τ в точках $\sigma(r)$ и $\tau(r)$ соответственно для всех $r \in [0, b]$.

Пусть $x = b\sigma_*(0)$, $y = b\tau_*(0)$, $s \in (M_m)_x$, $t \in (N_n)_y$. Тогда если s и t имеют одинаковую длину, то

$$\|d\exp_m s\| \geqslant \|d\exp_n t\|.$$

Доказательство. Пусть V — такое m-якобиево поле, что $V(b) = d\exp_m s$; W — такое n-якобиево поле, что $W(b) = d\exp_n t$; $f = \langle V, V\rangle$ и $g = \langle W, W\rangle$. Нужно показать, что $f(b)\geqslant g(b)$. Для этого достаточно проверить, что

(а) $(f/g)(0_+)=1$,

(б) $f'/f\geqslant g'/g$ на $[0, b]$, ибо тогда f/g не убывает.

Для доказательства (а) заметим, что вдоль лучей, идущих к x и y в M_m и N_n, существуют такие постоянные векторные поля A и B, что $A(x)=s$, $B(y)=t$, $V=uX$ и $W=uY$, где $X=d\exp_m A$, $Y=d\exp_m B$. Тогда $f/g=$ $=\langle X, X\rangle/\langle Y, Y\rangle$. Но $\langle X, X\rangle(0)=\langle A, A\rangle=\langle s, s\rangle=\langle t, t\rangle=$ $=\langle Y, Y\rangle(0)$.

Для доказательства (б) предположим сначала, что на $\sigma((0, r])$ нет точек, сопряженных с m. В таком случае $f(r)\neq 0$, так что можно положить $X=V/f(r)^{1/2}$; аналогично определяется $Y=W/g(r)^{1/2}$. Тогда X и Y — якобиевы поля, так что

$$(f'/f)(r)=\langle X, X\rangle'(r)=$$
$$=2\int_0^r(\langle X', X'\rangle-K_M(\sigma_*, X)\langle X, X\rangle)du\geqslant$$
$$\geqslant 2\int_0^r(\langle X', X'\rangle-K_N(\tau_*, X_N)\langle X, X\rangle)du,$$

где X_N — произвольное ненулевое векторное поле, нормальное к τ. Выбирая параллельные базисы E_i и F_i вдоль σ и τ так, чтобы $X(r)=E_1(r)$, $Y(r)=F_1(r)$, и используя коэффициенты разложения X относительно E_i как коэффициенты X_N относительно F_i, получаем некоторое поле X_N, совпадающее с Y в точке r, для которого $\langle X', X'\rangle=\langle X'_N, X'_N\rangle$ и $\langle X, X\rangle=\langle X_N, X_N\rangle$. В силу основного неравенства для индексной формы вдоль τ, имеем

$$(f'/f)(r)\geqslant 2\int_0^r(\langle Y', Y'\rangle-K_N(\tau_*, Y)\langle Y, Y\rangle)du=$$
$$=\langle Y, Y\rangle'(r)=(g'/g)(r).$$

Итак, $f(r)\geqslant g(r)$, пока на $\sigma((0, r])$ нет точки, сопряженной с m. Однако последнее условие нужно было лишь для того, чтобы можно было разделить на $f(r)^{1/2}$, так что, в силу непрерывности, $f(r)\geqslant g(r)$ для любого $r\in(0, b]$.

Следствие 1. В указанных предположениях первая точка, сопряженная с n, должна встретиться раньше, чем первая точка, сопряженная с m.

Следствие 2 (Бонне). Пусть кривизны всех плоских сечений многообразия M, касательных к некоторой геодезической γ, начинающейся в m, удовлетворяют неравенствам $0<L\leqslant K(P)\leqslant H$, где L и H — константы. Тогда если s — расстояние вдоль γ до первой точки, сопряженной с m на γ, то $\pi/H^{1/2}\leqslant s\leqslant\pi/L^{1/2}$.

Доказательство. Этот результат вытекает непосредственно из следствия 1 и сравнения со сферами постоянной кривизны L и H.

Замечание. Предположения теоремы Синга (теорема 11) можно ослабить, потребовав вместо компактности полноты и строго положительной кривизны.

Задача 36. Обобщить теорему Рауха, заменив точки m и n вполне геодезическими подмногообразиями равной размерности.

Теорема сравнения Рауха и результаты Клингенберга о замкнутых геодезических применяются при исследовании «ущемленных» многообразий, а также при доказательстве теоремы Топоногова о геодезических треугольниках [6—9, 28—30, 64—66, 74—76].

11.10. Кривизна и объем [10, 11, 18]

Преобразования Риччи R_x: $y\to R_{xy}x$ продолжаются до дифференцирований алгебры Грассмана; так как R_x симметрично относительно $\langle\ ,\ \rangle$, то эти продолжения симметричны относительно естественного продолжения $\langle\ ,\ \rangle$ (задача 4.14). Пусть $y_1, \ldots, y_p$, x — ортонормальные векторы, и P есть p-плоскость, натянутая на $y_1, \ldots, y_p$. Тогда *p-средней кривизной* вектора x и плоскости P называется скалярное произведение $K(x, P)=\langle R_x(y_1, \cdots \cdots y_p), y_1, \cdots, y_p\rangle$. В частности, существует единствен-