Теоремы о дифференциальных уравнениях

Мы рекомендуем читателю перевести нижеследующие утверждения (I) и (II) в координатную форму, проверив, что, по существу, те же теоремы содержатся в книге [34].

Пусть F есть C^∞-отображение $F\colon U^n \times U^m \to T(R^n)$, где U^n и U^m — открытые подмножества в R^n и R^m соответственно, $T(R^n)$ — касательное расслоение над R^n, причем $F(u, u') \in R^n_u$ для каждого $(u, u') \in U^n \times U^m$. Таким образом, F порождает векторное C^∞-поле на U^n при каждом $u' \in U^m$ или, в классической терминологии, систему n дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными, зависящую еще от параметра $u' \in U^m$.

(I) Существование и единственность

Существует единственное C^∞-отображение $\varphi : W—R^n$, где W — окрестность подмножества $\{0\} \times U^n \times U^m$ в пространстве $R \times U^n \times U^m$, такое, что для каждого $p = (t, u, u') \in W$:

(а) $d\varphi_p(D_1(p)) = F(\varphi(p), u')$, где D_1 — оператор частного дифференцирования, соответствующий R и его координате u_1 в $R \times U^n \times U^m$;

(б) $\varphi(0, u, u') = u$.

(II) Продолжение решений

Предположим, что F ограничено в евклидовой метрике на R^n. Можно считать, что эта окрестность W такова, что ее пересечения со слоями проекции $R \times U^n \times U^m \to U^n \times U^m$ имеют вид $(a, b) \times \{u\} \times \{u'\}$, причем либо $b = \infty$, либо $\lim\limits_{t \to b-} \varphi(t, u, u')$ существует и лежит вне U^n;

то же верно для другого конца. Точки a и b зависят от u и u'.

Это означает, что интегральные кривые можно продолжать в обоих направлениях, пока параметр не станет бесконечным или кривая не выйдет из U^n.

(III) Обобщение на многообразия

Перечисленные выше результаты остаются в силе, если U^n — открытое подмножество многообразия N, U^m — открытое подмножество многообразия M,

$$F\colon U^n \times U^m \to T(N).$$

(IV) Локальная группа, ассоциированная с F, $u' \in U^m$

Для всех $u' \in U^m$, t, $s \in R$, там, где это имеет смысл, выполнены условия

(а) $\varphi|_{\{t\} \times U^n \times \{u'\}}$ есть диффеоморфизм,

(б) $\varphi(s, \varphi(t, u, u'), u') = \varphi(s+t, u, u')$.