ГЛАВА 11

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ДЛИНЫ И ВРЕМЕНИ

В результате опыта Майкельсона и Морли было установлено, что невозможно обнаружить движение Земли относительно мирового эфира. Для того чтобы понять этот результат, необходим революционный переворот в наших представлениях, а именно необходим следующий новый физический принцип, который можно сформулировать просто и ясно:

> *Скорость света не зависит от движения его источника или приемника.*

Это означает, что скорость света имеет одну и ту же величину во всех системах отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно источника света. Многочисленные следствия, лежащие в основе специальной теории относительности, выводятся из этого нового утверждения, которым следует дополнить сформулированные выше (гл. 3) утверждения о том, что пространство изотропно и однородно и что основные физические законы имеют одинаковую форму в любых системах отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга.

От движения источника не зависит не только скорость распространения электромагнитных волн, т. е. фотонов: любые частицы с массой покоя (см. ниже), равной нулю, должны иметь скорость движения c, независимо от движения источника излучения; в частности, это справедливо для нейтрино и антинейтрино. Однако мы будем говорить о фотонах, потому что фотоны можно легче обнаружить, чем нейтрино.

Рассмотрим сначала световую волну, распространяющуюся от точечного источника. Волновой фронт (поверхность равной фазы) имеет форму сферической поверхности в системе отсчета, относительно которой источник света неподвижен. Но согласно сформулированному нами закону волновой фронт должен быть сферическим также и тогда, когда он наблюдается в системе отсчета, находящейся в равномерном и прямолинейном движении относительно источника; иначе на основании формы волнового фронта мы могли бы установить, что источник движется. Для выполнения основного предположения о том, что скорость света не зависит от движения источника, требуется, чтобы по форме волнового фронта нельзя было сказать, находится ли источник в равномерном и прямолинейном движении или нет.

11.1. Преобразование Лоренца

Теперь мы будем искать такую форму преобразования координат и времени, чтобы величина скорости света была независимой от движения источника или приемника. Обозначим без штриха такую систему отсчета S, в которой источник неподвижен. Координаты

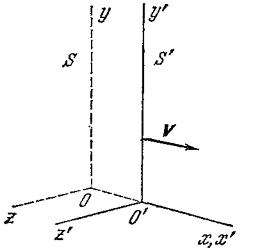

Рис. 11.1. S и S' — две инерциальные системы отсчета. S' движется со скоростью $\mathbf{V}$ относительно S.

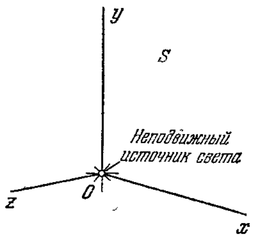

Рис. 11.2. Предположим, что в начале координат системы S находится неподвижный источник света.

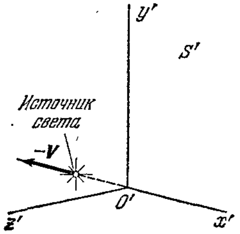

Рис. 11.3. В системе S' источник света имеет скорость $-\mathbf{V}$.

и время, измеренные наблюдателем в S, мы будем обозначать буквами без штрихов: x, y, z, t. Если источник света находится в начале координат системы отсчета S, то для света, испускаемого в момент $t=0$, уравнение сферического волнового фронта имеет вид:

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2. \tag{1}$$

Уравнение (1) описывает сферическую поверхность, радиус которой увеличивается со скоростью c.

Обозначим штрихом движущуюся систему отсчета S'. Координаты и время, измеренные наблюдателем в этой системе отсчета, обозначаются буквами со штрихами: x', y', z', t'. Для удобства предположим, что начало отсчета времени t' совпадает с началом отсчета t и что в этот совпадающий нулевой момент времени начало координат системы $x'y'z'$ совпадает с положением источника света в системе S. Тогда для наблюдателя в системе S' уравнение сферического волнового фронта должно иметь следующий вид:

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2. \tag{2}$$

Величина скорости света c здесь та же, что и в системе отсчета S.

Предположим, что система отсчета S' движется в направлении $+x$ с постоянной скоростью V относительно системы S. Преобразование Галилея (гл. 3) связывает величины, измеренные в двух системах отсчета, следующими уравнениями:

$$x'=x-Vt,\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=t. \tag{3}$$

Если мы подставим (3) в (2), то получим

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \qquad (4)$$

что, конечно, не согласуется с уравнением (1). Следовательно,

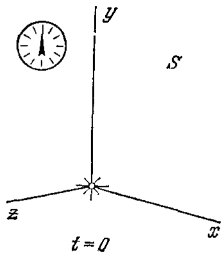

Рис. 11.4. Предположим, что источник испускает световой сигнал в момент времени $t=0$, отсчитанный по часам, неподвижным в системе отсчета S.

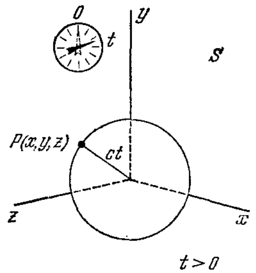

Рис. 11.5. Сферический волновой фронт достигнет точки $P(x, y, z)$ в момент $t=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}/c$. Скорость распространения волнового фронта равна c.

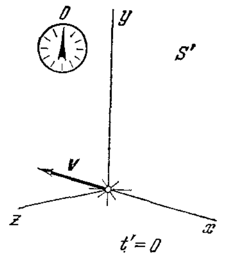

Рис. 11.6. Мы можем также наблюдать источник из системы отсчета S'. Мы можем поставить часы, неподвижные в системе S', таким образом, что они покажут нуль в тот момент, когда испускается сигнал.

преобразование Галилея не удовлетворяет указанному требованию. Если верен закон постоянства скорости света, то должно существовать какое-то преобразование, переходящее при $V/c \to 0$ в преобразование Галилея и преобразующее $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$ в $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$.

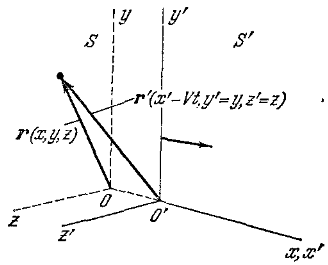

Рис. 11.7. Из преобразования Галилея следует, что в системе S' мы наблюдали бы сферический волновой фронт с центром в начале координат O системы S. На самом деле мы наблюдаем в системе S' сферический волновой фронт, но с центром в начале координат O' этой системы. Та же самая точка P' (теперь характеризуемая координатами x', y', z') достигается волновым фронтом в момент $t'=(x'^2+y'^2+z'^2)^{1/2}/c$. Очевидно, затруднение заключается в том, что преобразование Галилея противоречит постулатам специальной теории относительности. Нам необходимо другое преобразование. Возможно, окажется, что $t' \neq t$.

Мы ожидаем, что новое преобразование должно просто переводить y' и z' в y и z, потому что y'^2 и z'^2 в уравнении (2) преобразуются в y^2 и z^2 в уравнении (1) без дополнительных усилий. Нужное нам преобразование должно быть *линейным* относительно x и t, потому что мы хотим получить уравнение сферической поверхности, расширяющейся с постоянной скоростью. Бесполезно испытывать для этого функции $x'=x^{1/2}t^{1/2}$, $x'=\sin x$ или им подобные. Из уравнения (4) ясно видно, что мы не можем оставить без изменения преобразование $t'=t$, если мы хотим сократить нежелательные слагаемые $-2xVt+V^2t^2$, потому что для их сокращения; *безусловно, что-то должно быть прибавлено к* t.

Испытаем сначала преобразование такого вида:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t + fx, \tag{5}$$

где f — постоянная, значение которой надо определить. Тогда уравнение (2) принимает следующий вид:

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + 2c^2ftx + c^2f^2x^2. \tag{6}$$

Заметим, что члены, содержащие произведение xt, сокращаются, если принять

$$f = -\frac{V}{c^2} \quad \text{или} \quad t' = t - \frac{Vx}{c^2}. \tag{7}$$

При этом значении f можно переписать уравнение (6) таким образом:

$$x^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right). \tag{8}$$

Это уже ближе к уравнению (1), но остается нежелательный масштабный множитель $(1 - V^2/c^2)$, на который умножаются x^2 и t^2.

Мы можем исключить и этот масштабный множитель, придав преобразованию следующий вид:

$$\boxed{\begin{gathered} x' = \frac{x - Vt}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \\ t' = \frac{t - (V/c^2)\,x}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}. \end{gathered}} \tag{9}$$

Это и есть *преобразование Лоренца* *). Оно линейно относительно x и t; оно переходит в преобразование Галилея при $V/c \to 0$; при подстановке в уравнение (2) оно, как и требовалось, преобразует его в следующее уравнение:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2. \tag{10}$$

Таким образом, уравнение

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \tag{11}$$

инвариантно относительно преобразования Лоренца. Уравнение, описывающее волновой фронт, имеет, таким образом, одну и ту же форму во всех системах отсчета, движущихся с постоянной относительной скоростью. Применение системы уравнений (9) является единственным способом решения всех наших трудностей. Студент должен твердо запомнить преобразование Лоренца. Его не труднее заучить наизусть, чем какую-либо грамматическую форму неправильного глагола на иностранном языке.

---

*) Это преобразование имеет длинную историю. Впервые оно использовалось Лармором в его книге «Aether and Matter» («Эфир и вещество») для объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона и Морли. Лармор добивался точности только до величин порядка выше V^2/c^2; на самом деле его результаты совершенно точны.

Законы распространения электромагнитных волн можно вывести из уравнений теории электромагнитных явлений. Неудивительно поэтому, что инвариантность уравнения (11) оказывает сильное влияние на форму уравнений электромагнетизма. Мы используем эту взаимную связь в т. II, где мы дадим вывод уравнений электромагнетизма с помощью преобразования Лоренца (9).

Удобно применять некоторые стандартные обозначения. Введем обозначение

$$\boxed{\beta \equiv \frac{V}{c}}, \qquad (12)$$

т. е. β — это скорость, измеренная в такой системе единиц, для которой $c=1$. Удобно также ввести величину γ:

$$\boxed{\gamma \equiv \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \equiv \frac{1}{(1-V^2/c^2)^{1/2}}.} \qquad (13)$$

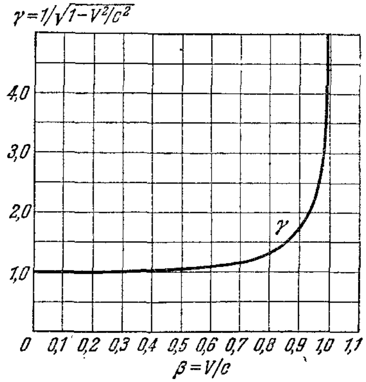

Рис. 11.8. Если $V \ll c$, то $\gamma \approx 1$. Вот почему преобразование Галилея хорошо выполняется для предметов, движущихся с «обычными» скоростями.

Заметим, что $\gamma \geqslant 1$. В предельных релятивистских задачах $1-\beta \ll 1$; полезно заметить, что при этом $1-\beta^2=(1-\beta)(1+\beta)\approx 2(1-\beta)$.

С обозначениями β и γ преобразование Лоренца принимает следующий вид:

$$x'=\gamma(x-\beta ct), \quad y'=y, \quad z'=z, \quad t=\gamma\left(t-\frac{\beta x}{c}\right), \qquad (14)$$

и, как легко видеть, ему соответствует такое обратное преобразование:

$$x=\gamma(x'+\beta ct'), \quad y=y', \quad z=z', \quad t=\gamma\left(t'+\frac{\beta x'}{c}\right). \qquad (15)$$

В задаче 2 читателю предлагается вывести формулы (15).

Пример. *Аберрация света.* В гл. 10 было показано, что для звезды, видимой в зените (когда скорость Земли перпендикулярна к линии наблюдения), угол наклона телескопа, т. е. угол аберрации света, определяется согласно уравнению (10.3):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_з}{c}. \qquad (16)$$

Этот результат был выведен исходя из нерелятивистских предпосылок. Теперь в качестве элементарного упражнения в применении преобразования Лоренца рассмотрим задачу об аберрации света с релятивистской точки зрения.

Предположим, что в системе отсчета S, относительно которой звезда неподвижна, световой сигнал от этой звезды поступает вдоль оси z при $x=y=0$. Система отсчета S', в которой неподвижна Земля, движется со скоростью v_3 в направлении x. Тогда траектория

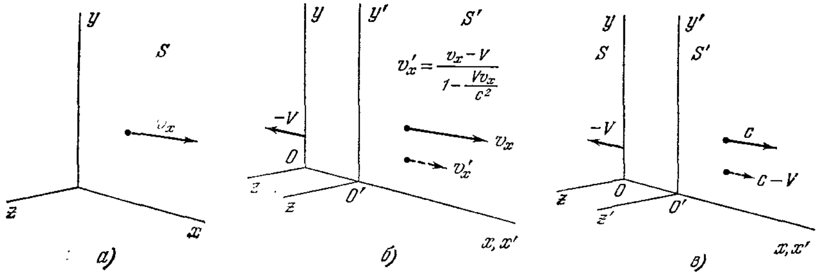

Рис. 11.9. *а*) Предположим, что в системе отсчета S частица имеет скорость v_x. *б*) Тогда в системе отсчета S' будет согласно преобразованию Лоренца $v'_x=(v_x-V)/(1-v_xV/c^2)$. Согласно преобразованию Галилея было бы $v'_x=v_x-V$. *в*) Как мы знаем, согласно преобразованию Лоренца, если $v_x=c$, то также $v'_x=c$. Это с самого начала было основным постулатом нашей теории.

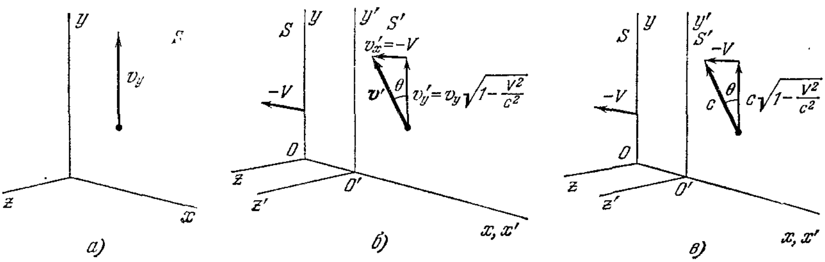

Рис. 11.10. *а*) Если в системе отсчета S частица имеет скорость v_y в направлении y, то составляющие ее скорости в системе отсчета S', согласно преобразованию Лоренца, имеют величину, указанную на рисунке *б*);

$$|\text{tg}\,\theta| = \frac{V}{v_y\sqrt{1-V^2/c^2}}\ .$$

в) В частности, если $v_y=c$, то результирующая скорость в системе S' также имеет величину c. Следовательно,

$$|\text{tg}\,\theta| = \frac{V}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}\ .$$

Это релятивистская формула аберрации.

светового сигнала определяется непосредственно из уравнений (14), в которых $x=0$:

$$x' = -\gamma\beta ct, \quad z' = z = ct, \quad t' = \gamma t. \tag{17}$$

Угол наклона определяется при этом так:

$$\text{tg}\,\alpha = -\frac{x'}{z'} = \gamma\beta = \frac{v_3/c}{(1-v_3^2/c^2)^{1/2}}\ . \tag{18}$$

В пределах точности измерений уравнение (18) совпадает с нерелятивистским уравнением (16), потому что для Земли $v_3/c \approx 10^{-4}$, но более правильным является уравнение (18).

П р и м е р. *Сложение скоростей.* Предположим, что система отсчета S' движется с постоянной скоростью $V\hat{\mathbf{x}}$ относительно системы отсчета S. Пусть какая-то частица в свою очередь движется относительно системы отсчета S' с постоянной скоростью, составляющие которой равны v'_x, v'_y, v'_z. Каковы составляющие v_x, v_y, v_z скорости этой частицы относительно системы отсчета S?

Из уравнений (15) получаем ($\beta=V/c$)

$$x=\gamma x'+\gamma\beta ct',\quad t=\gamma t'+\frac{\gamma\beta x'}{c},\tag{19}$$

откуда следует:

$$dx=\gamma\, dx'+\gamma\beta c\, dt',\qquad dt=\gamma\, dt'+\frac{\gamma\beta\, dx'}{c}.\tag{19а}$$

Таким образом,

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\gamma\, dx'+\gamma\beta c\, dt'}{\gamma dt'+\gamma\beta\, dx'/c}=\frac{vx'+\beta c}{1+\beta v'_x/c},\tag{20}$$

или

$$\boxed{v_x=\frac{v'_x+V}{1+v'_xV/c^2}.}\tag{20а}$$

Этот результат можно сравнить с результатом, полученным в гл. 3 из преобразования Галилея: $v_x=v'_x+V$. Подобным же образом, так как $y=y'$ и $z=z'$, получаем

$$\boxed{v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{dy'}{\gamma\, dt'+\gamma\beta\ dx'/c}=\frac{v'_y}{1+v'_xV/c^2}(1-V^2/c^2)^{1/2}}\tag{20б}$$

и

$$\boxed{v_z=\frac{v'_z}{1+v'_xV/c^2}(1-V^2/c^2)^{1/2}.}\tag{20в}$$

Обратное преобразование можно вывести с помощью уравнений (14) или посредством решения системы уравнений (20а), (20б), (20в) относительно составляющих скорости со штрихами:

$$\boxed{\begin{aligned}v'_x&=\frac{v_x-V}{1-v_xV/c^2},\\ v'_y&=\frac{v_y}{1-v_xV/c^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2},\\ v'_z&=\frac{v_z}{1-v_xV/c^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}.\end{aligned}}\tag{20г}$$

Предположим, что движущаяся частица — это фотон и в системе S' его скорость $v'_x=c$. Из уравнения (20а) мы видим, что

$$v_x=\frac{c+V}{1+cV/c^2}=c.\tag{20д}$$

Скорость фотона равна c также в системе отсчета S. Преобразование Лоренца было специально предназначено для получения такого результата, и то, что мы получили одну и ту же величину в обеих системах отсчета, служит дополнительной проверкой инвариантности этого преобразования.

Если $v_y=c$, а $v_x=0$, то $v'_x=-V$ и $v'_y=c(1-V^2/c^2)^{1/2}$, так что

$$\frac{v'_x}{v'_y}=-\frac{V}{c(1-V^2/c^2)^{1/2}}, \qquad (20e)$$

как и в уравнении (18).

Примеры. *Сложение скоростей* (*частные случаи*). 1. Предположим, что две частицы движутся навстречу друг другу со скоростью $v'_x=\pm 0{,}9c$, измеренной в системе отсчета S'. Какова скорость одной частицы относительно другой? Чтобы решить эту задачу, примем за S систему отсчета, в которой частица со скоростью $-0{,}9c$ неподвижна. Тогда скорость системы отсчета S' относительно системы S равна $V=0{,}9c$, так что частица, имеющая скорость $v'_x=+0{,}9c$ в системе S', обладает скоростью в системе S:

$$v_x=\frac{v'_x+V}{1+v'_xV/c^2}\cong\frac{1{,}8c}{1+(0{,}9)^2}=\frac{1{,}80}{1{,}81}c=0{,}994c. \qquad (21)$$

Заметьте, что относительная скорость этих двух частиц меньше c.

2. Если фотон движется со скоростью $+c$ в системе отсчета S', а сама система S' движется относительно системы S со скоростью $+c$, то скорость движения фотона, наблюдаемая относительно системы отсчета S, равна только $+c$, а не $+2c$. Существование предельной скорости является следствием уравнений сложения скоростей, выведенных нами из преобразования Лоренца. Далее, заметим, что *не существует* такой системы отсчета, в которой фотон (квант света) был бы неподвижен.

Саде выполнил красивый опыт (Phys. Rev. Letters **10**, 271 (1963)), показывающий, что скорость γ-лучей постоянна (с точностью $\pm 10\%$), независимо от скорости источника. В этом опыте сравнивались: источник со скоростью около $^1/_2c$ и неподвижный источник. Цитируем по его статье:

«В наших опытах мы использовали аннигиляцию при пробеге позитронов. При аннигиляции центр масс системы, состоящей из позитрона и электрона, движется со скоростью около $^1/_2c$, а в результате аннигиляции испускаются два γ-кванта. В случае аннигиляции в неподвижном состоянии оба γ-кванта испускаются под углом 180° и их скорость равна c. В случае аннигиляции при пробеге этот угол меньше 180° и зависит от энергии позитрона. Если бы скорость γ-кванта складывалась со скоростью центра масс согласно классическому правилу сложения векторов, а не согласно преобразованию Лоренца, то γ-квант, движущийся с некоторой составляющей скорости в направлении пробега позитрона, должен был бы иметь скорость бóльшую, чем c, а тот γ-квант, который имеет составляющую скорости в противоположном направлении, должен иметь скорость меньшую, чем c. Так как оказалось, что при одинаковых расстояниях между счетчиками и пунктом аннигиляции оба γ-кванта достигают счетчиков в одно и то же время, то это доказывает, что и при движущемся источнике оба γ-кванта распространяются с одинаковой скоростью».

Измерение длины объекта перпендикулярно к направлению относительной скорости. Согласно преобразованию Лоренца

$$y' = y, \quad z' = z. \tag{22}$$

Эти соотношения равносильны утверждению, что результат измерения длины, например, метровой линейки не зависит от ее скорости, *если* метровая линейка движется перпендикулярно к своей длине.

Как мы могли бы экспериментально проверить это утверждение? Мы можем взять метровую линейку и двигать ее с постоянной скоростью мимо другой, неподвижной метровой линейки. Нетрудно точно совместить начальные метки обеих метровых линеек. Тогда так же совместятся и метки «1 метр» на каждой линейке, или если при движении изменяется длина, то мы можем сделать на более длинной линейке риску, соответствующую метке «1 метр» на более короткой линейке. Эта операция дает объективный физический способ регистрации длины.

Пусть S — система отсчета, неподвижная относительно одной метровой линейки, а S'— система отсчета, неподвижная относительно другой. Предположим, что движение изменяет кажущуюся длину. Тогда, если физические законы должны оставаться одинаковыми как для наблюдателя в системе S, так и для наблюдателя в системе S', то линейка, которая казалась более короткой наблюдателю в системе S, обязательно должна казаться более длинной наблюдателю в системе S'. Но это обращение ролей несовместимо с нашим физическим способом однозначной регистрации факта, что одна метровая линейка короче другой. Следовательно, длины, определенные и в системе S и в системе S', должны быть равны. Смысл этого рассуждения главным образом заключается в подтверждении уравнения (22).

11.2. Сокращение длины

Представим себе линейку, лежащую вдоль оси x и неподвижную относительно системы отсчета S. Если линейка неподвижна, то в этой системе отсчета S координаты ее концов x_1 и x_2 не зависят от времени t. Следовательно, величина

$$L_0 = x_2 - x_1 \tag{23}$$

представляет собой *длину покоя* линейки.

Теперь будем рассматривать эту линейку в системе отсчета S', движущейся со скоростью $V\hat{\mathbf{x}}$ относительно системы S, в которой линейка неподвижна. Для измерения длины линейки в системе S' мы определяем координаты точек x_1' и x_2', совпадающих в данный